ECON 2915 – forelesning 13

Oppsummering

Fredag 22.november

Solow modellen

med befolkningsvekst

Modellen:

$$Y = F(K, L) \tag{1}$$

$$Y = C + I \tag{2}$$

$$\dot{K} = I - D \tag{3}$$

$$I = \gamma Y, \qquad 0 < \gamma < 1 \tag{4}$$

$$D = \delta K, \qquad 0 < \delta < 1 \tag{5}$$

$$n = \frac{\dot{L}}{L} \tag{6}$$

Solow modellen

med befolkningsvekst

Forutsetninger:

$$F(zK, zL) = zY$$

$$\frac{\delta F(K,L)}{\delta K} > 0, \qquad \frac{\delta^2 F(K,L)}{\delta K^2} < 0$$

$$\frac{\delta F(K,L)}{\delta L} > 0, \qquad \frac{\delta^2 F(K,L)}{\delta L^2} < 0$$

Modellen på intensivform

Produksjon *per arbeider* er en funksjon av kapital *per arbeider*.

$$\frac{Y}{L} = \frac{1}{L}F(K, L) = F\left(\frac{1}{L}K, \frac{1}{L}L\right) = F\left(\frac{K}{L}, 1\right)$$

Definerer

$$y \equiv \frac{Y}{L}, \qquad k \equiv \frac{K}{L}$$

Vi har:

$$y = F(k, 1) \equiv f(k)$$

Modellen på intensivform

Vi finner endring i kapitalmengde per arbeider over tid $\dot{k}$:

$$
\begin{aligned}
\dot{k} = \frac{d\left(\frac{K}{L}\right)}{dt} &= \frac{\dot{K}L - K\dot{L}}{L^2} \\
&= \frac{\dot{K}}{L} - \frac{K}{L}\frac{\dot{L}}{L} \\
&= \frac{\gamma Y - \delta K}{L} - kn \\
&= \gamma y - \delta k - nk \\
&= \gamma f(k) - (\delta + n)k
\end{aligned}
$$

Viktig! Merk at $\dot{k} = \frac{d\left(\frac{K}{L}\right)}{dt} \neq \frac{\dot{K}}{L} = \gamma y - \delta k$

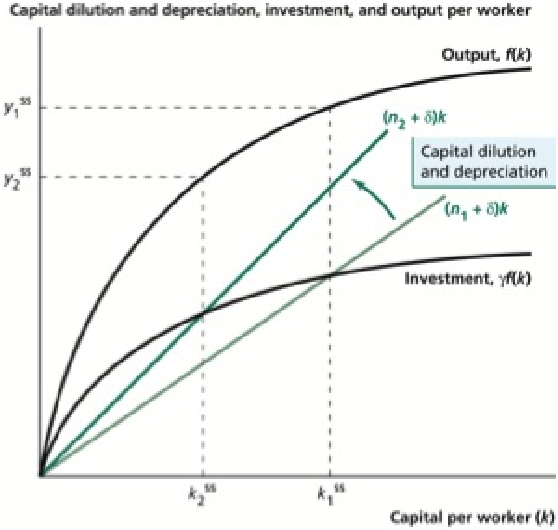
Stasjonærtilstanden

Stasjonærtilstanden er karakterisert ved $\dot{k} = 0$:

$$\dot{k} = \gamma f(k_{ss}) - (\delta + n)k_{ss} = 0$$
$$\Leftrightarrow \gamma f(k_{ss}) = (\delta + n)k_{ss}$$

Investering per arbeider lik "effektiv depresiering" av kapital per arbeider (= depresiering + fortynnelse)

Figure 4.7: The Solow model incorporating population growth



Cobb-Douglas produktfunksjonen

Cobb-Douglas-produksjonsfunksjonen er gitt ved,

$$Y = F(K, L) = AK^{\alpha}L^{1-\alpha} \qquad 0 < \alpha < 1$$

hvor A er produktivitetsnivået.

Konstant skalautbytte:

$$F(zK, zL) = A(zK)^{\alpha}(zL)^{1-\alpha} = zAK^{\alpha}L^{1-\alpha} = zF(K, L)$$

Positivt og avtagende MP:

$$F'_K(K, L) = \alpha AK^{\alpha-1}L^{1-\alpha} > 0$$

$$F''_{KK}(K, L) = (\alpha - 1)\alpha AK^{\alpha-2}L^{1-\alpha} < 0$$

Modellen på intensivform

Cobb-Douglas produktfunksjonen

Cobb-Douglas funksjonen per arbeider:

$$\frac{Y}{L} = \frac{AK^{\alpha}L^{1-\alpha}}{L} = AK^{\alpha}L^{-\alpha} = A\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha}$$
$$y = Ak^{\alpha}$$

Endring i kapitalmengde per arbeider over tid $\dot{k}$:

$$\begin{aligned}\dot{k} &= \gamma f(k) - (\delta + n)k \\ &= \gamma Ak^{\alpha} - (\delta + n)k\end{aligned}$$

Stasjonærløsningen

Cobb-Douglas produktfunksjonen

Stasjonærtilstanden (hvor $\dot{k} = 0$) er gitt ved,

$$\dot{k} = \gamma A k_{ss}^{\alpha} - (\delta + n) k_{ss} = 0$$

$$\Leftrightarrow \gamma A k_{ss}^{\alpha} = (\delta + n) k_{ss}$$

$$\Leftrightarrow k_{ss} = \left(\frac{\gamma A}{n + \delta}\right)^{1/(1-\alpha)}$$

$$y_{ss} = A(k_{ss})^{\alpha} = A^{1/(1-\alpha)} \left(\frac{\gamma}{n + \delta}\right)^{\alpha/(1-\alpha)}$$

Hvor raskt nærmer økonomien seg stasjonærtilstanden?

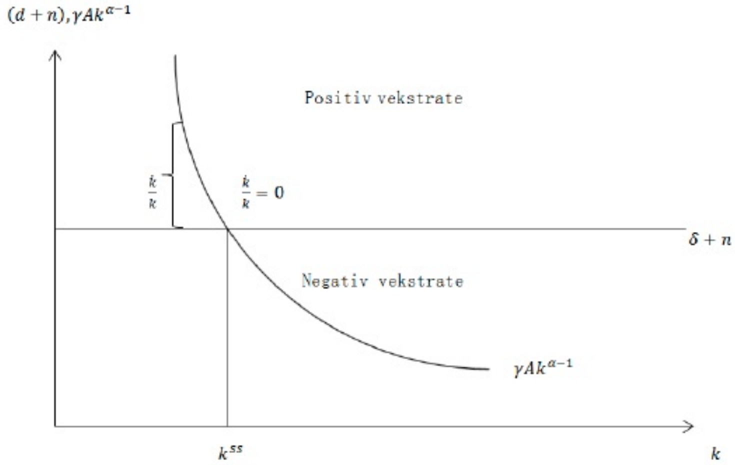
Kapitalintensitetens vekstrate:

$$\hat{k} = \frac{\dot{k}}{k} = \gamma A k^{\alpha-1} - (\delta + n)$$

I stasjonærløsningen har vi:

$$\hat{k} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \gamma A (k^{ss})^{\alpha-1} = (\delta + n)$$

Hvor raskt nærmer økonomien seg stasjonærtilstanden?



Solow-modellen med humankapital

Vi endrer på Cobb-Douglas produksjonsfunksjonen,

$$\begin{aligned} Y &= AK^{\alpha}(hL)^{1-\alpha} \\ &= h^{1-\alpha}AK^{\alpha}L^{1-\alpha} \end{aligned}$$

hvor h er mengden arbeidsinnsats per arbeider.

Modellen på intensivform

Solow-modellen med humankapital

$Y = h^{1-\alpha} A K^{\alpha} L^{1-\alpha}$

$\Leftrightarrow y \equiv Y/L = h^{1-\alpha} A K^{\alpha} L^{-\alpha} = A k^{\alpha} h^{1-\alpha}$, der $k = K/L$

Vi finner endring i kapitalmengde per arbeider over tid $\dot{k}$:

$$\begin{aligned} \dot{k} = \frac{d\left(\frac{K}{L}\right)}{dt} &= \gamma y - (\delta + n)k \\ &= \gamma A k^{\alpha} h^{1-\alpha} - (\delta + n)k \end{aligned}$$

Stasjonærtilstanden

Solow-modellen med humankapital

Stasjonærtilstanden er karakterisert ved $\dot{k} = 0$

$\Leftrightarrow \gamma h^{1-\alpha} A (k^{ss})^{\alpha} = (\delta + n) k^{ss}$

$\Leftrightarrow k^{ss} = h \times \left(\frac{A\gamma}{\delta+n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$

$$y^{ss} = h \times \left[A^{1/(1-\alpha)} \left(\frac{\gamma}{n+\delta} \right)^{\alpha/(1-\alpha)} \right]$$

Produksjonen i stasjonærtilstanden er altså direkte proporsjonal med h, målet på arbeidsinnsats per arbeider.

Utviklingsregnskap

Utviklingsregnskap er en teknikk for å skille ut forskjeller i inntekt som skyldes forskjeller i faktorakkumulasjon, og dermed kalkulere forskjellen i produktiviteten som residualen.

Vi sammenlikner to land med produksjonsfunksjoner $y_1 = A_1 k_1^\alpha h_1^{1-\alpha}$ og $y_2 = A_2 k_2^\alpha h_2^{1-\alpha}$.

$$\frac{y_1}{y_2} = \left(\frac{A_1}{A_2}\right)\left(\frac{k_1^\alpha h_1^{1-\alpha}}{k_2^\alpha h_2^{1-\alpha}}\right)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{\left(\frac{y_1}{y_2}\right)}{\left(\frac{k_1^\alpha h_1^{1-\alpha}}{k_2^\alpha h_2^{1-\alpha}}\right)}$$

Vekstregnskap

Vekstregnskap er en teknikk for å skille ut økonomisk vekst som skyldes vekst i innsatsfaktorene, og dermed kalkulere produktivitetsveksten som residualen.

Cobb-Douglas produksjonsfunksjonen (per arbeider) med humankapital,

$$y = Ak^{\alpha}h^{1-\alpha}$$

Vekstratene er gitt ved,

$$\begin{aligned} \hat{y} &= \hat{A} + \widehat{k^{\alpha}} + \widehat{h^{(1-\alpha)}} \\ \Leftrightarrow \hat{y} &= \hat{A} + \alpha\hat{k} + (1-\alpha)\hat{h} \\ \Leftrightarrow \hat{A} &= \hat{y} - \alpha\hat{k} - (1-\alpha)\hat{h} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{produktivitetsvekst} = {} & \text{vekst i produksjonen} \\ & - \text{vekst i innsatsfaktorene} \end{aligned}$$

Produktivitet avhenger både av teknologi og effektivitet

Teknologi:

kunnskap om bruk av innsatsfaktorene i produksjonen

Effektivitet:

selve bruken av teknologien og innsatsfaktorene i produksjonen

Teknologi
Modell med to land

Vi ser på to land, land 1 og land 2

$L_1 = L_2 = L$

$A_1 \neq A_2$

Teknologisk framgang kan oppnås ved *innovasjon* eller *imitasjon*

$$y_1 = A_1(1 - \gamma_{A,1})$$
$$y_2 = A_2(1 - \gamma_{A,2})$$

$\gamma_{A,1}$ er andelen av arbeidsstyrken i land 1 som er involvert i FoU
$\gamma_{A,2}$ andelen av arbeidsstyrken i land 2 som er involvert i FoU

Teknologi

Modell med to land

Anta at land 1 er "teknologi-lederen" og at land 2 er "teknologi-følgeren": $A_1 > A_2$ og $\gamma_{A,1} > \gamma_{A,2}$.

For land 1 gjelder,

$$\hat{A}_1 = \frac{\gamma_{A,1}}{\mu_i} L_1$$

hvor μ_i står for innovasjonskostnaden (i for innovasjon)

For land 2 gjelder,

$$\hat{A}_2 = \frac{\gamma_{A,2}}{\mu_c} L_2$$

hvor μ_c står for kopikostnaden (c for copying)

Teknologi

Modell med to land

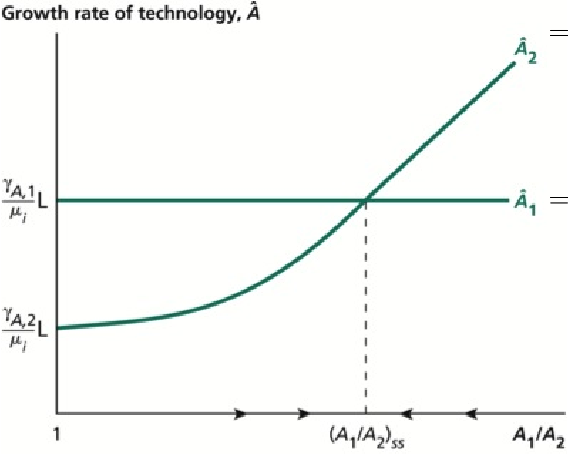
μ_c er kostnaden av å tilegne seg ny teknologi ved kopiering,

$$\mu_c = c\left(\frac{A_1}{A_2}\right) \quad \text{hvor } A_1 > A_2$$

Antagelser om kostnadsfunksjonen,

(1) det er billigere å kopiere enn å utvikle ny teknologi ($\mu_c \leq \mu_i$)
(2) kopi-kostnaden synker når teknologigapet øker ($c' < 0$)
(3) $\mu_c \to 0$ når $A_1/A_2 \to \infty$
(4) $\mu_c \to \mu_i$ når $A_1/A_2 \to 1$

Figure 8.3: Steady state in the two-country model



$$\hat{A}_2 = \frac{\gamma_{A,2}}{\mu_c} L_2 = \frac{\gamma_{A,2}}{c\left(\frac{A_1}{A_2}\right)} L_2$$

$$\hat{A}_1 = \frac{\gamma_{A,1}}{\mu_i} L_1$$

Dekomponering av produktivitet i teknologi og effektivitet

Produktiviteten (A) bestemmes både av teknologien (T) og effektiviteten (E):

$$A = T \times E$$

Vi sammenligner relativ teknologi og effektivitet i land i og land j,

$$\frac{A_i}{A_j} = \frac{T_i}{T_j} \times \frac{E_i}{E_j}$$

Dekomponering av produktivitet i teknologi og effektivitet

Anta at land i ligger G år bak land j teknologisk

$$T_{t,i} = T_{t-G,j}$$

La g være gjennomsnitlig vekstrate til teknologien (i begge land). Vi finner forholdet mellom teknologien i land i og land j:

$$\begin{aligned} T_{t,j} &= T_{t-G,j} \times (1+g)^G \\ &= T_{t,i} \times (1+g)^G \end{aligned}$$

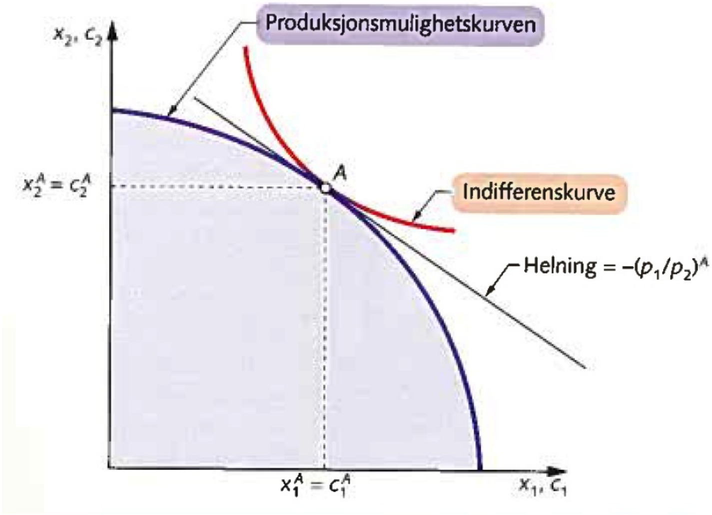
$$\Leftrightarrow \frac{T_{t,i}}{T_{t,j}} = (1+g)^{-G}$$

Dekomponering av produktivitet i teknologi og effektivitet

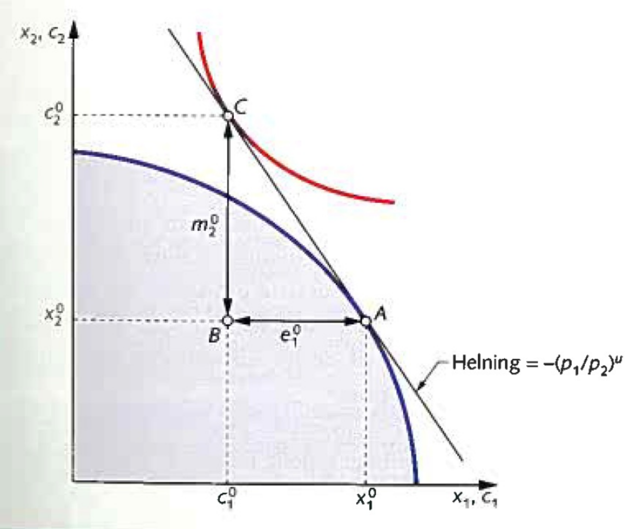
$$\frac{A_i}{A_j} = \frac{T_{t,i}}{T_{t,j}} \times \frac{E_i}{E_j}$$
$$= (1+g)^{-G} \times \frac{E_i}{E_j}$$

$$\Leftrightarrow \frac{E_i}{E_j} = \frac{A_i/A_j}{(1+g)^{-G}}$$

Figur 2.4: Generell likevekt i en lukket økonomi



Figur 2.5: Generell likevekt i en åpen økonomi



Bævre og Vislie (2007)

Næringsstruktur, internasjonal handel og vekst

Hecksher-Ohlin-Samuelson modellen

To varer, Y_1 og Y_2

To innsatsfaktorer, K og L

Teknologien er gitt ved $Y_i = F^i(L_i, K_i)$, $i = 1, 2$.

1) Positivt avtagende marginalprodukt

2) Konstant skalautbytte

Kostnadsminimering

Kostnadsminimeringsproblemet gitt ved:

$$Min_{\{L_i,K_i\}} wL_i + qK_i \quad \text{gitt} \quad Y_i^0 = F^i(K_i, L_i)$$

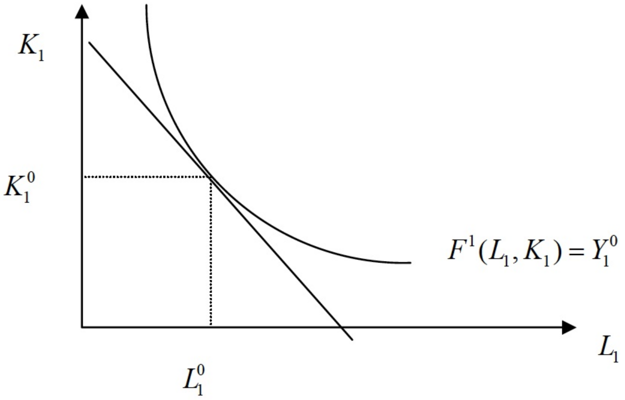
FOC

$$w = \lambda \frac{\delta F^i(L_i^0, K_i^0)}{\delta L_i} \tag{i}$$

$$q = \lambda \frac{\delta F^i(L_i^0, K_i^0)}{\delta K_i} \tag{ii}$$

$$\Leftrightarrow \frac{w}{q} = \frac{\frac{\delta F^i(L_i^0, K_i^0)}{\delta L_i}}{\frac{\delta F^i(L_i^0, K_i^0)}{\delta K_i}}$$

Figur 2: Kostnadsminimering for gitt Y_1^0



Kostnadsfunksjonen

Løs FOC for $L_i = L_i(w, p, Y_i)$ og $K_i = K_i(w, q, Y_i)$.

Insetting i målfunksjonen $(wL_i + qK_i)$ gir kostnadsfunksjonen

$$C_i(w, q, Y_i) = wL_i(w, q, Y_i) + qK_i(w, q, Y_i)$$

Egenskaper ved kostnadsfunksjonen:

(1) $C_i(w, q, Y_i)$ er ikke-avtagende i Y_i

(2) $C_i(tw, tq, Y_i) = tC_i(w, q, Y_i)$ for alle $t > 0$

(3) $C_i(w, q, Y_i)$ er konkav i w og q (1) og (2) er åpenbare

Shephards lemma

$$\frac{\delta C_i(w, q, Y)}{\delta w} = L_i(w, q, Y_i) \geq 0$$

$$\frac{\delta C_i(w, q, Y)}{\delta q} = K_i(w, q, Y_i) \geq 0$$

Faktoretterspørselsfunksjonene

Egenskaper

Homogene av grad 0

$$L_i(tw, tq, Y_i) = L_i(w, q, Y_i)$$
$$K_i(tw, tq, Y_i) = K_i(w, q, Y_i)$$

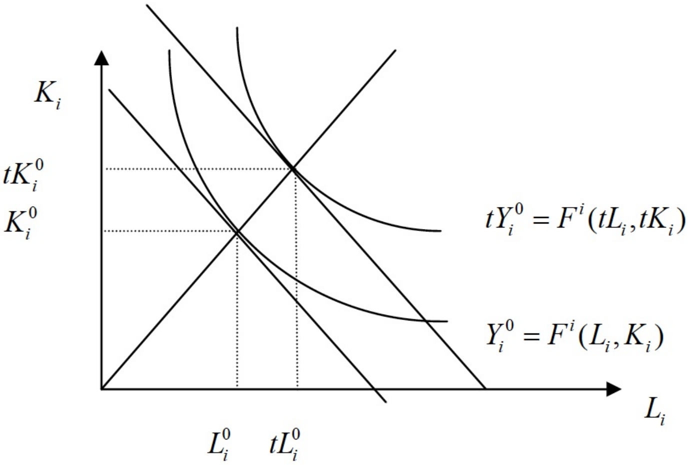
Effekt av prisendringer

$$\frac{\delta K_i(w, q, Y_i)}{\delta q} = \frac{\delta^2 C_i(w, q, Y_i)}{\delta q^2} \leq 0$$
$$\frac{\delta L_i(w, q, Y_i)}{\delta w} = \frac{\delta^2 C_i(w, q, Y_i)}{\delta w^2} \leq 0$$
$$\frac{\delta^2 C_i(w, q, Y_i)}{\delta q \delta w} = \frac{\delta}{\delta w}\frac{\delta C_i(w, q, Y_i)}{\delta q} = \frac{\delta K_i(w, q, Y_i)}{\delta w} \geq 0$$
$$= \frac{\delta}{\delta q}\frac{\delta C_i(w, q, Y_i)}{\delta w} = \frac{\delta L_i(w, q, Y_i)}{\delta q} \geq 0$$

Konsekvenser av konstant skalautbytte

$$
\begin{aligned}
F^i(tL_i, tK_i) &= tF^i(L_i, K_i) \quad t > 0 \\
C_i(w, q, Y_i) &= c_i(w, q) \times Y_i \\
L_i(w, q, Y_i) &= l_i(w, q) \times Y_i, \\
K_i(w, q, Y_i) &= k_i(w, q) \times Y_i \\
\frac{K_i}{L_i} &= \phi_i\left(\frac{w}{q}\right), \quad \text{for alle} Y_i
\end{aligned}
$$

Figur 1: Isokvanter ved konstant skalautbytte



Likevekt i en liten åpen økonomi

Y_1 og Y_2 handles fritt på verdensmarkedet til gitte priser p_1 og p_2

K og L i gitte mengder, ikke mobile mellom land

I likevekt har vi:

$$p_1 = c_1(w, q) \tag{1}$$

$$p_2 = c_2(w, q) \tag{2}$$

$$c_{1w}(w, q)Y_1 + c_{2w}(w, q)Y_2 = L \tag{3}$$

$$c_{1q}(w, q)Y_1 + c_{2q}(w, q)Y_2 = K \tag{4}$$

Likevektsbetingelser

(1) og (2) utgjør en determinert delmodell, to likninger med to ukjente, w og q.

Kan løses for faktorprisene som funksjoner av p_1, p_2 (dvs. uavhengig av L og K):

$$w = w(p_1, p_2) \tag{5}$$
$$q = q(p_1, p_2) \tag{6}$$

To land med fri handel og fri teknologiflyt $\Rightarrow$

Faktorprisutjevningsteoremet:
Avlønningen av en produksjonsfaktor som brukes til å produsere samme vare i flere land, vil være den samme og uavhengig av hvor den brukes.

Likevektsbetingelser

Setter (5) og (6) inn i (3) og (4):

$$c_{1w}\big(w(p_1,p_2),q(p_1,p_2)\big)\,Y_1 + c_{2w}\big(w(p_1,p_2),q(p_1,p_2)\big)\,Y_2 = L \quad (7)$$

$$c_{1q}\big(w(p_1,p_2),q(p_1,p_2)\big)\,Y_1 + c_{2q}\big(w(p_1,p_2),q(p_1,p_2)\big)\,Y_2 = K \quad (8)$$

To likninger i to ukjente Y_1 og Y_2, løser:

$$Y_1 = Y_1(p_1,p_2,L,K) \quad (9)$$

$$Y_2 = Y_2(p_1,p_2,L,K) \quad (10)$$

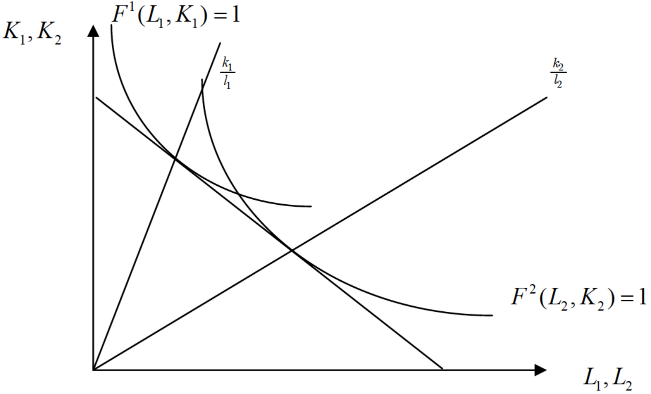
Faktorintensitet

Produksjonen av vare j er relativt mer kapitalintensiv enn produksjonen av en annen vare i, dersom antall enheter realkapital per arbeidstime er større i fremstillingen av vare j enn i vare i, uansett hva faktorprisene er.

Antar at sektor 1 er kapitalintensiv:

$$\frac{k_1(w,q)}{l_1(w,q)} > \frac{k_2(w,q)}{l_2(w,q)}$$

Figur 5: Beskrivelse av faktorintensitet



Handelsteoremene

Antagelser:

- To land, to innsatsfaktorer
- Fri handel, ingen transaksjonskostnader
- Lik teknologi (lik kostnadsfunksjon)
- Begge land produserer begge varer

Handelsteoremene:

1) Faktorprisutjevningsteoremet

2) Stolper-Samuelson-teoremet

3) Rybczynski-teoremet

Stolper-Samuelson-teoremet

En økning i en pris på en ferdigvare vil øke avlønningen til den faktor som brukes intensivt i produksjonen av denne varen. Når vi har to produksjonsfaktorer vil prisen på den andre faktoren (som brukes intensivt i produksjonen av den andre varen) gå ned.

Deriverer (1) og (2) m.h.p. p_1, bruker at faktorprisene er funksjoner av ferdigvareprisene, løser for

$$\frac{\delta q}{\delta p_1} = \frac{\frac{1}{l_1}}{\frac{k_1}{l_1} - \frac{k_2}{l_2}} > 0$$

$$\frac{\delta w}{\delta p_1} = -\frac{k_2}{l_2} \frac{\frac{1}{l_1}}{\frac{k_1}{l_1} - \frac{k_2}{l_2}} < 0$$

for $\frac{k_1}{l_1} > \frac{k_2}{l_2}$

Rybczynski-teoremet

Om tilgangen på en produksjonsfaktor øker, vil produksjonen av den vare som er intensiv i vedkommende faktor gå opp, mens produksjonen av den andre varen vil gå ned.

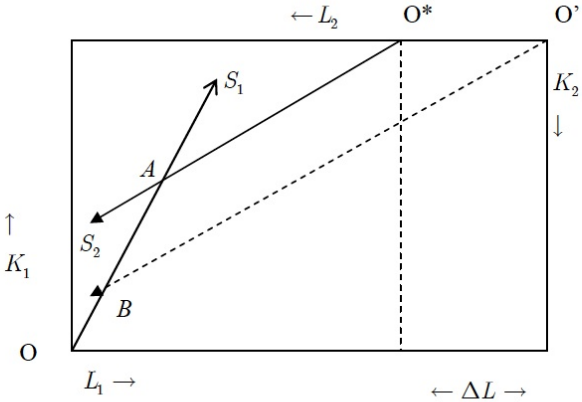
Deriverer (3) og (4) m.h.p. L, løser for

$$\frac{\delta Y_2}{\delta L} = \frac{\frac{1}{k_2}}{\frac{l_2}{k_2} - \frac{l_1}{k_1}} > 0$$

$$\frac{\delta Y_1}{\delta L} = -\frac{\frac{1}{k_1}}{\frac{l_2}{k_2} - \frac{l_1}{k_1}} < 0$$

for $\frac{k_1}{l_1} > \frac{k_2}{l_2}$

Figur 8: Illustrasjon av Rybczynskiteoremet



Økonomiens tilbudsside

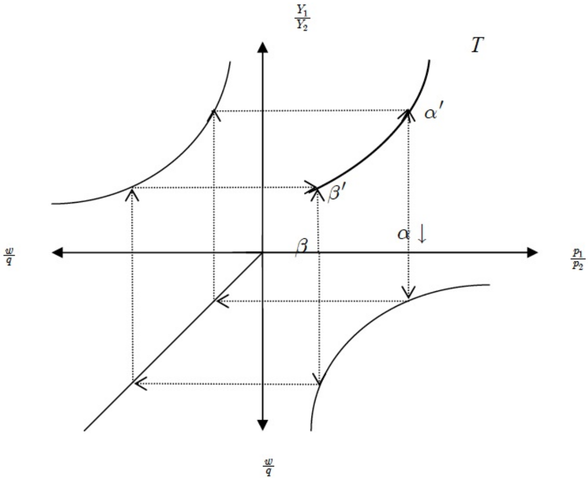
Vi utleder tilbudsfunksjonen, sammenhengen mellom $\frac{Y_1}{Y_2}$ og $\frac{p_1}{p_2}$.

Stolper-Samuelson ga en sammenheng mellom $\frac{p_1}{p_2}$ og $\frac{w}{q}$,

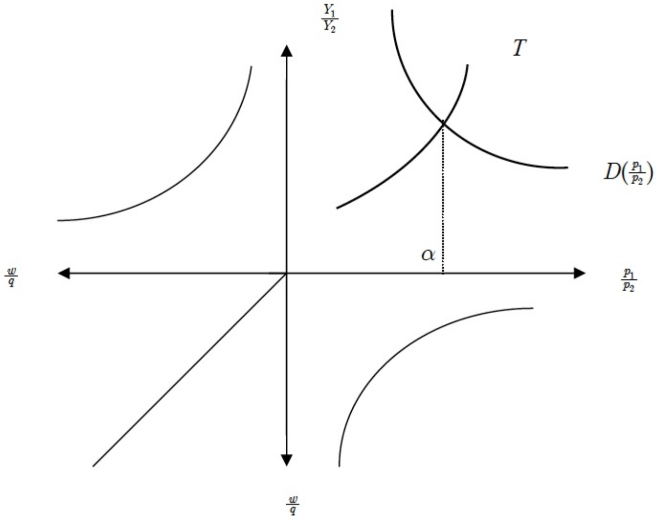
Hva er sammenhengen mellom $\frac{Y_1}{Y_2}$ og $\frac{w}{q}$?

En høyere relativ produktmengde av den kapitalintensive varen $\frac{Y_1}{Y_2}$ krever at begge sektorer bruker flere arbeidere per kapitalenhet som kun er forenlig med et lavere faktorprisforhold $\frac{w}{q}$ (for gitt faktortilgang).

Figur 11: Utledning av tilbudssammenhengen



Figur 12: Etablering av autarkilikevekten



Internasjonal handel

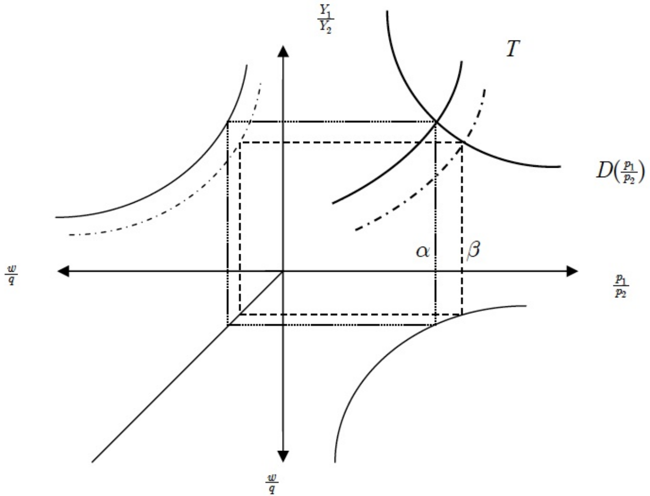
Komparative fortrinn:

Hvis et land har lavere relativ autarkipris på vare 1 (lavere p_1/p_2) enn andre land, da har dette landet et komparativt fortrinn i produksjonen av vare 1.

Heckscher-Ohlin teoremet:

Et land har komparativt fortrinn i produksjonen av den vare som bruker landets relativt rikelige produksjonsfaktor intensivt i produksjonen.

Figur 13: Virkning på autarkilikevekten av endret relativ ressurstilgang

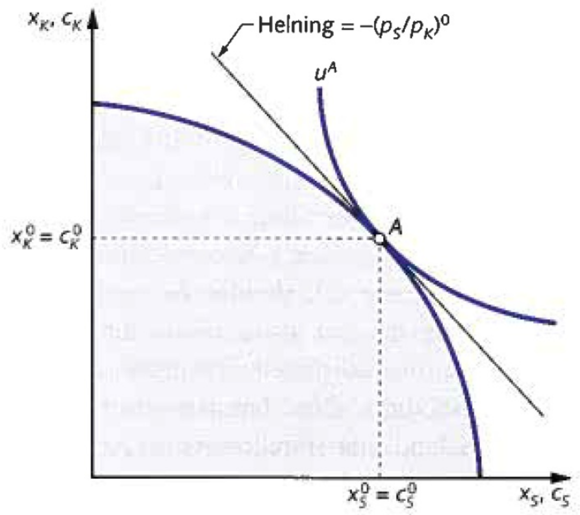


Skjermet og konkurranseutsatt virksomhet

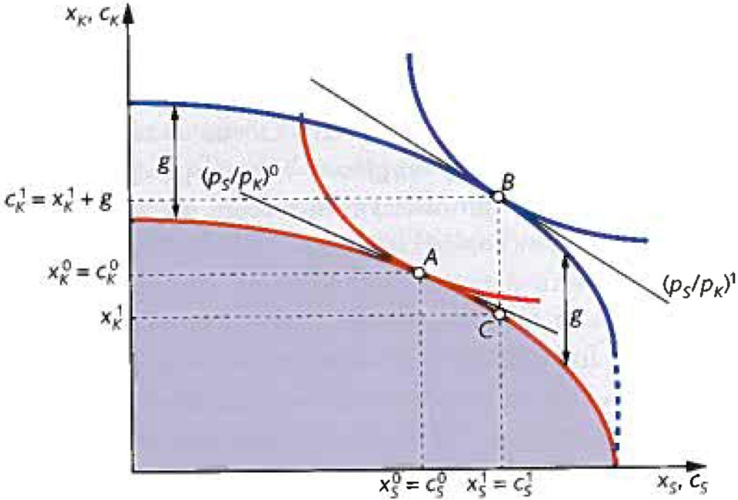
Konkurranseutsatt sektor: virksomheter som står overfor utenlandsk konkurranse

Skjermet sektor: virksomheter som ikke står overfor utenlandsk konkurranse

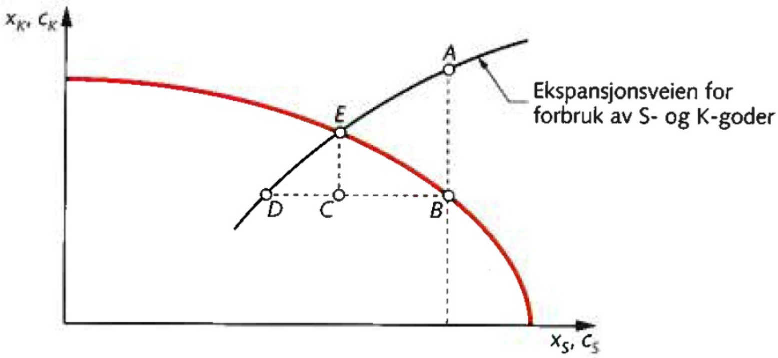
Figur 4.2: Allokering av ressurser til S- og K-virksomhet



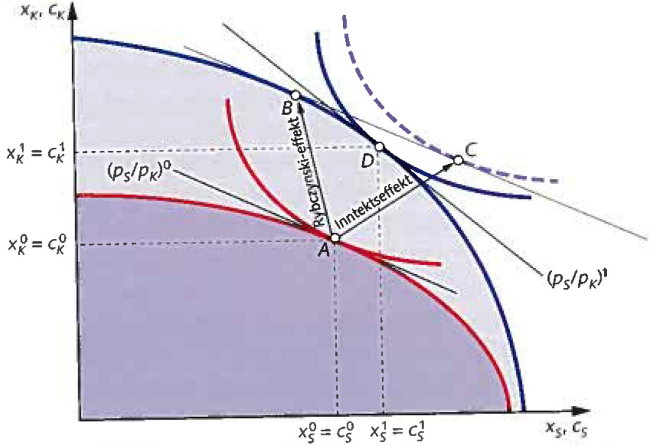
Figur 4.3: Virkninger av en valutagave



Figur 4.7: Reverseringsproblemet



Vekst i kapitalbeholdningen



Teknologisk utvikling