ECON 2915 – forelesning 2

Kapital som innsatsfaktor. Solow-modellen.

Fredag 30.august, 2013

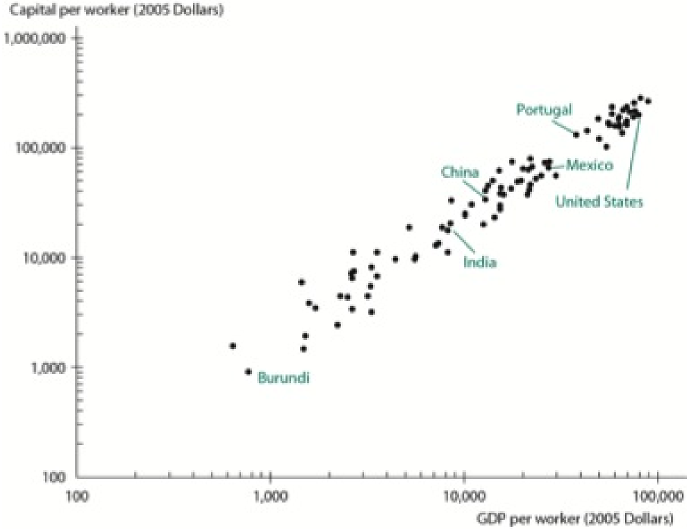
Kapital ('physical capital') som innsatsfaktor i produksjonen

Kapital er 'verktøy' i produksjonen.

Eksempler: maskiner, bygninger, veier, kjøretøy, datamaskiner

Ulik tilgang til kapital er et viktig bidrag til forklaringen på hvorfor det finnes så store inntektsforskjeller mellom land.

Figur 3.1: BNP og kapital per arbeider 2009



Kapitalens karakteristika

Viktige egenskaper ved kapital:
(1) produktiv (kan øke produksjonen ved kapitalbruk)
(2) produseres (i motsetning til naturressurser)
(3) rivaliserende (i motsetning til idéer)
(4) kan gi avkastning (gir insentiver til anskaffelse)
(5) verdien forringes over tid (depresiering)

Økonomiske teorier før og nå

Før 1800-tallet var ikke den viktigste innsatsfaktoren (ved siden av arbeidskraften) kapital, men snarere *jordbruksland*.

Kapital ble en stadig viktigere produksjonsfaktor pga teknologisk utvikling.

Table 3.1: Agricultural land as a fraction of total wealth in the United Kingdom

1688	64%
1798	55%
1885	18%
1927	4%
1958	3%

Investeringer

Kapitalakkumulasjon krever investeringer

Vi ser på en lukket økonomi:
innenlands sparing = innenlands investering

Kapitalens rolle i produksjonen

Produksjonsfunksjonen er gitt ved:

$$Y = F(K, L)$$

hvor Y står for produksjonen (BNP), K står for kapitalbeholdningen og L for antall arbeidere (L for Labor).

To antagelser om produksjonsfunksjonen:
(1) konstant skalautbytte (CRS)
(2) positivt og avtagende marginalprodukt

Antagelse 1: Konstant skalautbytte

Vi antar at produksjonsfunksjonen har konstant skalautbytte:

$$F(zK, zL) = zF(K, L)$$

Sett f.eks. $z = 2$, dvs $F(2K, 2L)$: en dobling av hver av innsatsfaktorene (L og K) gir en dobling av produksjonen.

Vi sier også at funksjonen er *homogen av grad 1*. En funksjon som er homogen av grad n er karakterisert ved $G(zX, zY) = z^{n} G(X, Y)$

Homogen av grad < 1: avtagende skalautbytte
Homogen av grad > 1: økende skalautbytte

Antagelse 2: Positivt og avtagende marginalprodukt

Positivt marginalprodukt: Alt annet likt, produksjonen øker når vi øker kapitalmengden. $F'_K(K, L) > 0$

Avtagende marginalprodukt: Økningen i produksjonen ved en enhets økning i kapitalmengden blir mindre etterhvert som kapitalmengden blir større. $F''_{KK}(K, L) < 0$

Produksjon per arbeider

I vekstteorien ser vi typisk på BNP per innbygger eller per arbeider. Vi får produksjon per arbeider ved å gange $Y = F(K, L)$ med $z = \frac{1}{L}$:

$$\frac{Y}{L} = \frac{1}{L}F(K, L) = F\left(\frac{1}{L}K, \frac{1}{L}L\right) = F\left(\frac{K}{L}, 1\right)$$

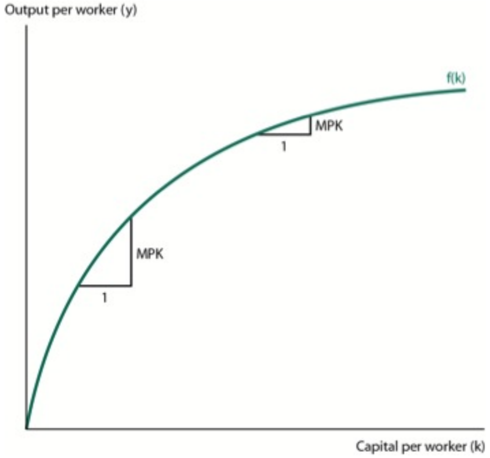
Produksjon *per arbeider* er en funksjon av kapital *per arbeider*. Definer

$$y \equiv \frac{Y}{L}, \qquad k \equiv \frac{K}{L}$$

Vi har:

$$y = F(k, 1) \equiv f(k)$$

Figur 3.2: A production function with diminishing marginal product of capital



Cobb-Douglas funksjonen

Det er ofte nyttig å bruke en spesifikk funksjonsform for å beskrive produksjonsprosessen. Vi bruker Cobb-Douglas.

For Cobb-Douglas-produksjonsfunksjonen gjelder de samme to antagelsene vi har gjennomgått,
(1) konstant skalautbytte
(2) positivt og avtagende marginalprodukt

Cobb-Douglas produktfunksjonen

Cobb-Douglas-produksjonsfunksjonen er gitt ved,

$$Y = F(K, L) = AK^{\alpha}L^{1-\alpha} \qquad 0 < \alpha < 1$$

hvor A er produktivitetsnivået.

Potensregning

Se Sydsæter (2010), bind I, side 3-6

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q} \qquad (a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p$$

$$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q} \qquad a^0 = 1$$

$$(a^p)^q = a^{p \cdot q} \qquad a^{-p} = \frac{1}{a^p}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p} \qquad a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$$

a og b er positive reelle tall, p og q er vilkårlige reelle tall

Antagelse 1: Konstant skala-utbytte (se appendikset til kap.3)

Cobb-Douglas funksjonen $F(K, L) = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$ har konstant skalautbytte:

$$
\begin{aligned}
F(zK, zL) &= A(zK)^{\alpha}(zL)^{1-\alpha} \\
&= Az^{\alpha}K^{\alpha}z^{1-\alpha}L^{1-\alpha} \\
&= z^{\alpha+1-\alpha}AK^{\alpha}L^{1-\alpha} \\
&= zF(K, L)
\end{aligned}
$$

Antagelse 2: Positivt og avtagende marginalprodukt (se appendikset)

Cobb-Douglas funksjonen $F(K, L) = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$ marginalproduktet til kapital er positivt og avtagende

$$F'_K(K, L) = \alpha AK^{\alpha-1}L^{1-\alpha} > 0$$

$$F''_{KK}(K, L) = (\alpha - 1)\alpha AK^{\alpha-2}L^{1-\alpha} < 0$$

Modellen på intensivform

Cobb-Douglas funksjonen per arbeider:

$$\frac{Y}{L} = \frac{AK^{\alpha}L^{1-\alpha}}{L} = AK^{\alpha}L^{-\alpha} = A\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha}$$

$$y = Ak^{\alpha}$$

Hvordan kan vi tallfeste α ?

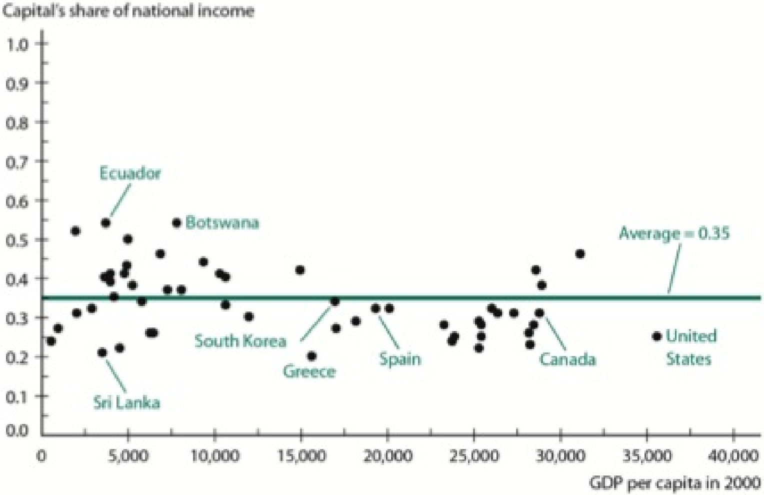
Kapitalens andel av nasjonal inntekt ($Y = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$):

$$\frac{MPK \times K}{Y} = \frac{(\alpha AK^{\alpha-1}L^{1-\alpha}) \times K}{AK^{\alpha}L^{1-\alpha}}$$

$$= \frac{\alpha AK^{\alpha}L^{1-\alpha}}{AK^{\alpha}L^{1-\alpha}} = \alpha$$

α er anslagsvis $1/3$

Figure 3.3: Capital's share of income in a cross-section of countries



Solow-modellen: En enkel vekstmodell

Solow-modellen er en enkel vekstmodell, hvor land med høyere sparerater vil ha høyere inntektsnivå, alt annet likt.

Modellen ble utarbeidet av Robert Solow i 1956.

Økonomiske modeller

Noen punkter om økonomiske modeller:

- matematiske fremstillinger av noen aspekter ved økonomien
- kan være veldig enkel og likevel gi enorm innsikt
- uten forenklinger mister man oversikt

"All theory depends on assumptions which are not quite true. That is what makes it theory." — Robert Solow (1956, p.65)

Solow modellen

Vi ser på en lukket økonomi $Y = C + I$

Vi benytter vi en produksjonsfunksjon $Y = F(K, L)$ med positivt, avtagende marginalprodukt og konstant skalautbytte

I tillegg gir vi en beskrivelse av hvordan kapitalmengden per arbeider bestemmes

Vi antar konstant produktivitet A og arbeidsstyrke L (null befolkningsvekst). I senere kapittel vil vi se på hva som skjer hvis vi tillater endringer i antall arbeidere og produktivitetsnivået.

Produksjonsvekst vil være et resultat utelukkende av kapitalakkumulasjon

Bestemmelse av kapitalmengde per arbeider

Endringen i kapitalbeholdningen ($\Delta K = K_{t+1} - K_t$) er differansen mellom mengden investering I og mengden depresiering D.

$$\Delta K = I - D$$

Antar at en konstant del av produksjonen blir investert og at en konstant del av kapitalbeholdningen depresierer hver periode:

$$\Delta K = \gamma Y - \delta K$$

Endringen i k, kapitalmengde per arbeider, finner vi ved å dele på antall arbeidere. Merk at vi har forutsatt konstant antall arbeidere!

$$\Delta k = \gamma y - \delta k$$

Vi setter inn for $y = f(k)$ og får:

$$\Delta k = \gamma f(k) - \delta k \qquad (*)$$

Endringen i kapitalbeholdningen

Anta at i år 2010 er mengden kapital per arbeider i et gitt land lik 120 og mengden produsert per arbeider, $f(k)$, er 60. Investeringen er lik 25% av produksjonen og kapitalens depresieringsrate er 5%. Da får vi:

$$\Delta k = \gamma f(k) - \delta k \qquad (*)$$

$$\Delta k = 0.25 \times 60 - 0.05 \times 120 = 15 - 6 = 9$$

Det vil si at endringen i kapitalbeholdningen per arbeider er lik 9 enheter. Mengden kapital per arbeider i 2011 i det gitte landet er dermed $120 + 9 = 129$.

Stasjonærtilstand ('steady state') i Solow-modellen

Endringen i kapitalbeholdningen per arbeider er gitt ved:

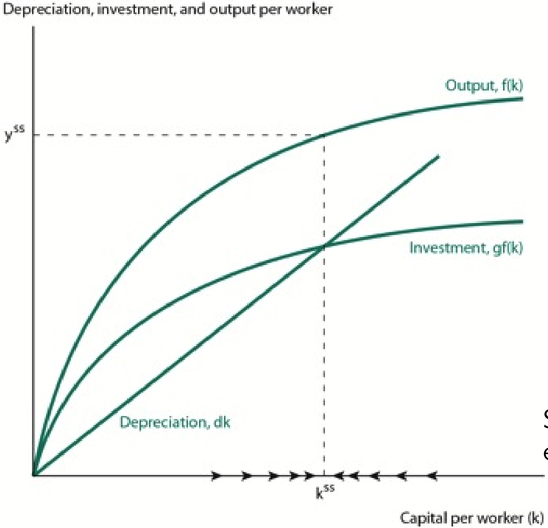
$$\Delta k = \gamma f(k) - \delta k \qquad (*)$$

$\Delta k > 0$ hvis $\gamma f(k) > \delta k$
$\Delta k < 0$ hvis $\gamma f(k) < \delta k$

$\Delta k = 0$ hvis $\gamma f(k^{ss}) = \delta k^{ss}$, som gir modellens stasjonærtilstand ('steady state'). Kapitalmengden per arbeider i stasjonærtilstanden kaller vi k^{ss}. Det tilsvarende produksjonsnivået per arbeider kaller vi y^{ss}.

Hvis kapitalnivået er k^{ss}, så endres ikke kapitalmengden per arbeider over tid. Hvis $k \neq k^{ss}$ (og dermed $y \neq y^{ss}$), beveger økonomien seg mot stasjonærtilstanden over tid.

Figur 3.4: The steady state of the Solow model



$k < k^{ss}$

$\Leftrightarrow \gamma f(k) > \delta k$

$\Leftrightarrow \Delta k > 0$

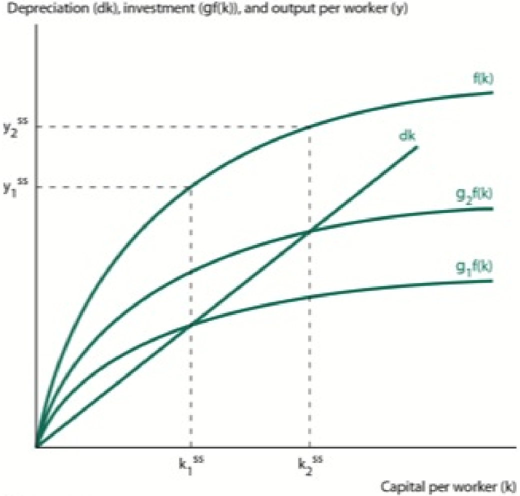
$k > k^{ss}$

$\Leftrightarrow \gamma f(k) < \delta k$

$\Leftrightarrow \Delta k < 0$

Stasjonærløsningen er stabil

Figur 3.6: The effect of increasing the investment rate on the steady state



Note: $g_2 > g_1$

Analytisk løsning med Cobb-Douglas

Endringen i kapitalbeholdningen over tid når vi bruker Cobb-Douglas-funksjonen $f(k) = Ak^{\alpha}$:

$$\Delta k = \gamma A k^{\alpha} - \delta k \qquad (*)$$

Stasjonærtilstanden med Cobb-Douglas-funksjonen:

$$\begin{aligned}
0 &= \gamma A (k^{ss})^{\alpha} - \delta k^{ss} \\
\gamma A (k^{ss})^{\alpha} &= \delta k^{ss} \qquad \text{vi deler på } (k^{ss})^{\alpha} \\
\gamma A &= \delta (k^{ss})^{1-\alpha} \qquad \text{vi deler på } \delta \\
(k^{ss})^{1-\alpha} &= \frac{\gamma A}{\delta} \qquad \text{og opphøyer med } 1/(1-\alpha)
\end{aligned}$$

$$k^{ss} = \left(\frac{\gamma A}{\delta}\right)^{1/(1-\alpha)}$$

Uttrykk for y^{ss} ved bruk av Cobb-Douglas

Vi setter uttrykket for k^{ss} inn i Cobb-Douglas-produksjonsfunksjonen $y = Ak^{\alpha}$:

$$y^{ss} = A(k^{ss})^{\alpha} \qquad \text{hvor } k^{ss} = \left(\frac{\gamma A}{\delta}\right)^{1/(1-\alpha)}$$

$$y^{ss} = A^{1/(1-\alpha)}\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^{\alpha/(1-\alpha)}$$

(Vi ser at $\gamma \uparrow \implies y^{ss} \uparrow$ og at $\delta \uparrow \implies y^{ss} \downarrow$)

Hvor raskt nærmer økonomien seg stasjonærtilstanden?

Kapitalens vekstrate med bruk av Cobb-Douglas:

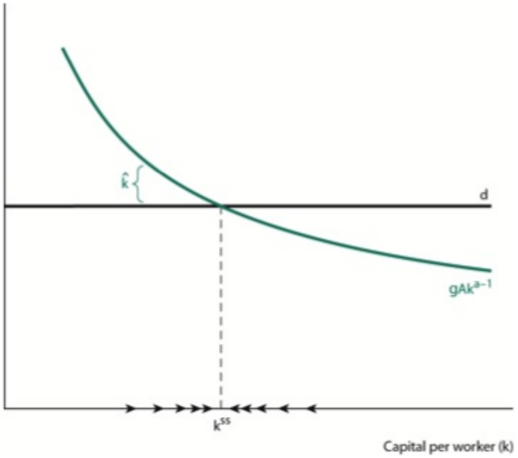
$$\hat{k} = \frac{\Delta k}{k} = \gamma A k^{\alpha - 1} - \delta$$

$\hat{k} = 0$ hvis $\gamma A (k^{ss})^{\alpha - 1} = \delta$

$k < k^{ss} \Leftrightarrow \hat{k} > 0$

$k > k^{ss} \Leftrightarrow \hat{k} < 0$

Figur 3.10: Speed of convergence to the steady state



Kapitalens vekstrate er lik avstanden mellom kurvene:

Den øker med avstanden til stasjonærtilstanden.

Prediksjoner fra Solow-modellen

Tenk på to land, i og j, som kun har forskjellig investeringsrate (γ_i for land i og γ_j for land j).

De to landene har altså samme produktivitetsnivå (A) og samme depresieringsrate (δ). Antar at α tar samme verdi for begge land. Begge land antas å befinne seg i stasjonærtilstanden.

$$y_i^{ss} = A^{1/(1-\alpha)} \left(\frac{\gamma_i}{\delta} \right)^{\alpha/(1-\alpha)}$$

$$y_j^{ss} = A^{1/(1-\alpha)} \left(\frac{\gamma_j}{\delta} \right)^{\alpha/(1-\alpha)}$$

$$\frac{y_i^{ss}}{y_j^{ss}} = \left(\frac{\gamma_i}{\gamma_j} \right)^{\alpha/(1-\alpha)}$$

Prediksjoner fra Solow-modellen: inntektsnivå

Fra forrige side:

$$\frac{y_i^{ss}}{y_j^{ss}} = \left(\frac{\gamma_i}{\gamma_j}\right)^{\alpha/(1-\alpha)}$$

Vi setter nå at investeringsraten for land i er 27% og at investeringsraten for land j er 3%. Vi setter $\alpha = 1/3$, og får dermed at $\alpha/(1-\alpha) = 1/2$.

$$\frac{y_i^{ss}}{y_j^{ss}} = \left(\frac{0.27}{0.03}\right)^{1/2} = 9^{1/2} = 3$$

Gitt antakelsene vi har gjort, så predikerer Solow-modellen at inntekten vil være tre ganger høyere i landet med en investeringsrate på 27% (sammenlignet med 3%).

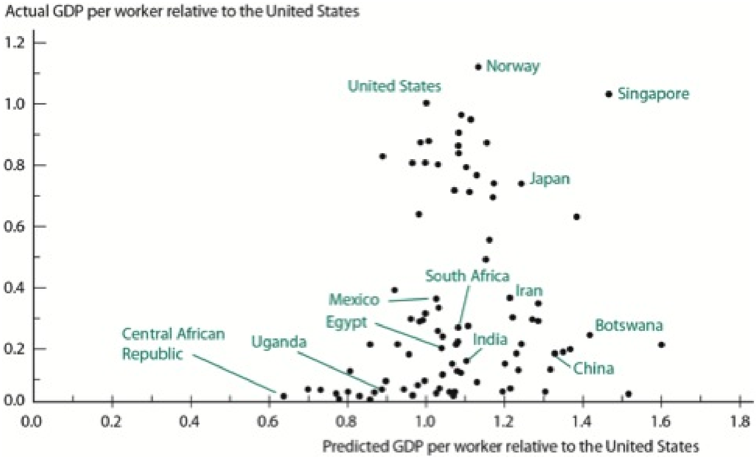
Teori versus data: empirisk testing av Solow-modellen

Vi kan teste Solow-modellen ved hjelp av data på lands gjennomsnittlige investeringsrate over perioden 1975–2009.

Antar at produktivitet og depresieringsrate er lik på tvers av land, $\alpha = 1/3$ i alle land, og at alle land befinner seg i stasjonærtilstanden

Bruker faktiske data på investeringsrate og produksjon per arbeider

Figur 3.7: Predicted versus actual GDP per worker



Teori versus data: empirisk testing av Solow-modellen

Perfekt modell? Da ville vi forvente at datapunktene lå langs 45-grader linjen.

Ingen forklaringskraft? Da ville vi forvente at det ikke var noe synlig mønster for datapunktene.

Prediksjoner fra Solow-modellen: vekstrater

I Solow-modellen vil et lands BNP per arbeider ha en positiv vekstrate kun utenfor stasjonærtilstanden.

Alt annet likt,

(1) Hvis to land har samme investeringsrate, men forskjellige inntektsnivå, så vil landet med lavest inntekt ha høyest vekst.

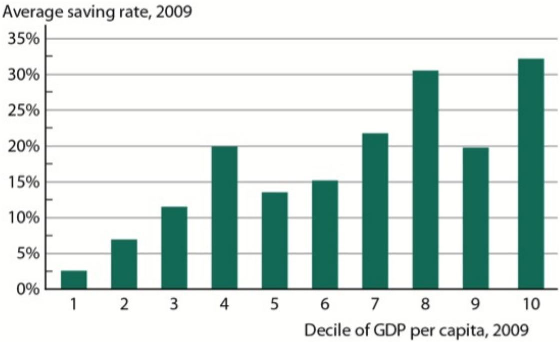
(2) Hvis to land har samme inntektsnivå, men forskjellige investeringsrater, så vil landet med høyest investeringsrate ha høyest vekst.

(3) Et land som øker investeringsnivået sitt vil oppleve en økning i inntektsveksten.

Investering og sparing

Vi har sett bort fra investering i utlandet (lukket økonomi):
landets investering = landets sparing

I kapittel 11 vil vi se at et lands investeringsrate er i høy grad korrelert med landets sparerate



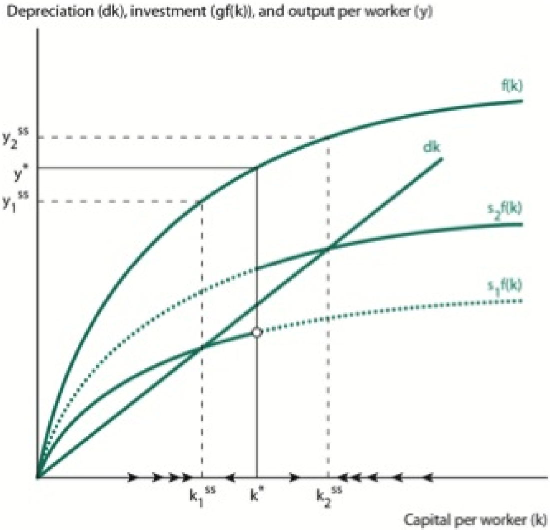
Kan inntektsnivået påvirke sparераten?

Hvilke implikasjoner ville en endogen sparerate hatt for Solow-modellen?

Anta at det finnes to sparerater, en lav sparerate (s_1) og en høy sparerate (s_2) og at følgende gjelder:

$$\begin{aligned} \gamma &= s_1 \text{ hvis } y < y^\star \\ &= s_2 \text{ hvis } y \geq y^\star \end{aligned}$$

Figur 3.9: Solow model with saving dependent on income level



Multiple stasjonærtilstander

Linjen som representerer $\gamma f(k)$ gjør nå et hopp når $k = k^{\star}$. Det finnes to mulige stasjonærtilstander.

'Fattigdomsfelle': s er lav fordi y er lav, y er lav fordi s er lav.

Økonomer har en aktiv debatt om hvorvidt multiple stasjonærtilstander kan forklare inntektsforskjeller, hvor spareraten bestemmes av inntektsnivået som igjen bestemmer spareraten.