Solow-modellen - et tilleggsnotat i ECON2915

Herman Kruse*

27. september 2013

Innhold

*Takk til Gry Tengmark Østenstad og professor Tore Nilssen for svært nyttige kommentarer

I dette notatet vil jeg forsøke å forklare matematikken i Solow-modellen og hvordan vi anvender den i ECON2915. Kommentarer eller spørsmål angående notatet kan rettes til: herman.kruse@econ.uio.no

1 Solow-modellen – en innføring

Solow-modellen er en vekstmodell i sin aller enkleste form, som bygger på de neo-klassiske egenskapene. Dette er en retning innen økonomi som kort fortalt fokuserer på at priser, produksjon og inntekt bestemmes av tilbud og etterspørsel i markedet. Dette bestemmes av nyttemaksimerende konsumenter med en budsjett-beskrankning og profittmaksimerende bedrifter med en kostnads-beskrankning. Solow-modellen i en lukket økonomi baserer seg på følgende likninger, der jeg for kompletthetens skyld viser modellen med befolkningsvekst:

$$Y = F(K, L) \tag{1}$$
$$Y = C + I \tag{2}$$
$$I = \gamma Y \tag{3}$$
$$\dot{K} = I - \delta K \tag{4}$$
$$\frac{\dot{L}}{L} = n \tag{5}$$

Her er Y bruttonasjonalproduktet, K er kapital, L er arbeidskraft, C er konsum, I er investeringer, $\dot{K}$ [1] er endringen i kapitalbeholdningen over tid, $\dot{L}$ er endringen i arbeidsstokken over tid (slik at $\frac{\dot{L}}{L}$ er vekstraten til arbeidsstokken), $F(\cdot)$ er en funksjon som forteller hvordan kapital og arbeidskraft brukes i produksjonen, γ er en parameter $\gamma \in (0,1)$ og angir andelen av BNP som benyttes til investeringer, δ er en parameter $\delta \in (0,1)$ og angir kapitalslitet (kapitalforringelsen), altså hvor stor andel av den eksisterende kapitalbeholdningen som slites til neste periode, n er befolkningens vekstrate $n \geq 0$.

1.1 Forklaring av likningene

(1)Er en produktfunksjon, som forteller hvor stor produksjonen (nasjonalproduktet) blir om vi bruker mengdene K og L i produksjonen. Funksjonen antas å ha de egenskapene som er listet i kapittel 2.
(2)Er en økosirk-relasjon som forteller at samlet inntekt er lik samlet forbruk, altså at alt som produseres går til konsum eller investeringer.
(3)Er en investeringsfunksjon (en atferdsfunksjon) som sier at en andel γ av nasjonalproduktet går til investeringer.
(4)Er en dynamisk relasjon som sier at endringen i kapitalbeholdningen (kapitalakkumulasjonen) er gitt som differansen mellom investeringene og depresieringen av kapitalen.
(5)Er en dynamisk relasjon som sier at befolkningsveksten er en konstant rate n.

[1](OBS: Legg merke til at $\dot{K}$ betyr den tidsderiverte av kapitalen. Dette er en notasjon innført av Newton, og det kalles derfor Newton-prikk. Ikke la dere skremme, det betyr rett og slett: $\frac{\partial K}{\partial t}$.)

1.2 Å sette modellen på intensivform

Produktfunksjonen er homogen av grad 1 (konstant skalutbytte), som innebærer at en t-dobling av argumentene gir en t-dobling av funksjonsverdien. Vi utnytter dette ved å sette $t = \frac{1}{L}$, slik at vi får:

$$\frac{1}{L}Y = F(\frac{1}{L}K, \frac{L}{L})$$
$$\text{Og vi definerer:} \frac{Y}{L} := y, \frac{K}{L} := k$$
$$\Rightarrow y = F(k, 1) := f(k) \tag{6}$$

Og om vi gjør tilsvarende for ligning (2)-(3) får vi:

$$y = f(k)$$
$$y = c + i$$
$$i = \gamma y$$
$$\text{Hvor vi har definert} \frac{C}{L} := c, \frac{I}{L} := i$$

1.2.1 Stasjonærløsningen

Siden vi antar at alle modellens variable er funksjoner av tiden, kan vi utnytte dette til å derivere K/L med hensyn på tiden for å få et uttrykk for $\dot{k}$ (altså endringen i kapital per arbeider over tid – som skal være 0 i stasjonærtilstanden).

$$\frac{d}{dt}(\frac{K}{L}) = \frac{\dot{K}\,L - \dot{L}\,K}{L^2} = \frac{\dot{K}}{L} - \frac{\dot{L}}{L}\frac{K}{L}$$

Der deriveringen er vanlig brøkregel, og den andre likheten kommer av å splitte brøken i to brøker. Den tidsderiverte av $\frac{K}{L}$ er jo nettopp $\dot{k}$ (i og med at vi definerer alle variable delt på L som liten bokstav av samme variabel). Dette betyr at vi nå har:

$$\dot{k} = \frac{\dot{K}}{L} - \frac{\dot{L}}{L}k = i - \delta k - nk = \gamma y - \delta k - nk = \gamma f(k) - (\delta + n)k$$
$$\underline{\underline{\dot{k} = \gamma f(k) - (\delta + n)k}} \tag{7}$$

Den første likheten her kommer av at $\dot{k} := \frac{d}{dt}(\frac{K}{L})$ og $\frac{K}{L} := k$. Den andre likheten fremkommer ved å benytte at $\dot{K} = I - \delta K$ fra (4) og at $\frac{\dot{L}}{L} = n$ fra (5) slik at $\frac{\dot{K}}{L} = \frac{I - \delta K}{L} = i - \delta k$ per definisjon av i og k. Videre innsetting for $i = \gamma y$ og $y = f(k)$ gir (7).

2 Egenskaper ved produktfunksjonen

Det er svært viktig for forståelsen av modellen at vi forstår de grunnleggende egenskapene ved produktfunksjonen og hvordan vi kan vise disse. Innledningsvis husker vi at Solow-modellen bygger på de neo-klassiske egenskapene, og for produktfunksjonen er disse:

- Konstant skalautbytte
- Positivt, men avtagende grenseprodukt
- Essensielle produksjonsfaktorer
- En konstant andel av kapitalen forringes
- *Inada-betingelsen (strengt tatt ikke pensum, men er en nødvendig betingelse for at det eksisterer en stasjonærløsning)*

2.1 Konstant skalautbytte (homogenitet av grad 1)

Dersom en t-dobler argumentene, vil en t-doble produksjonen. Matematisk kan dette uttrykkes som: $F(tK, tL) = tF(K, L) = tY$ Og i det vi innfører en Cobb-Douglas-produktfunksjon av formen $Y = K^\alpha L^{1-\alpha}, \alpha \in (0, 1)$, kan dette uttrykkes som: $(tK)^\alpha (tL)^{1-\alpha} = t^\alpha t^{1-\alpha}(K^\alpha L^{1-\alpha}) = t(K^\alpha L^{1-\alpha}) = tY$

2.2 Positiv, men avtagende grenseproduktivitet

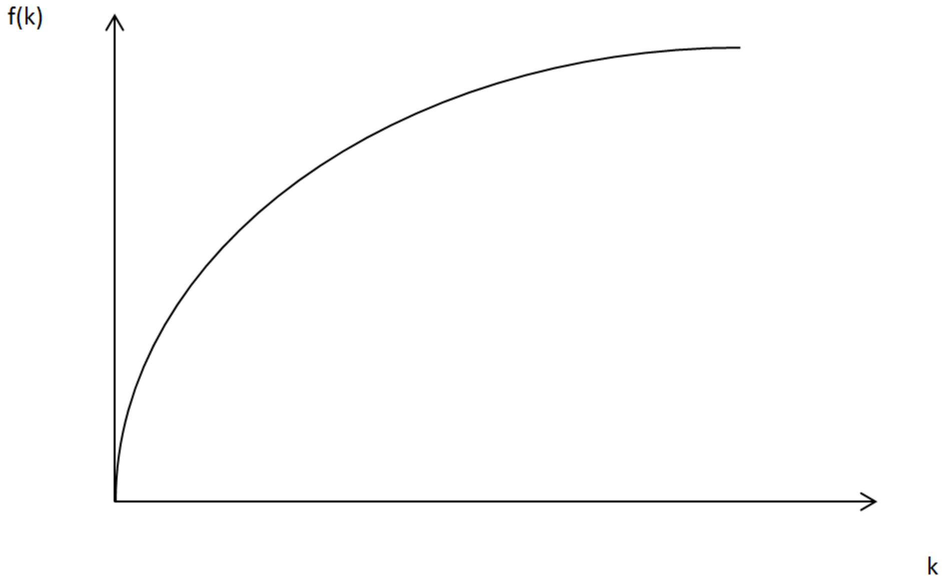
Denne betingelsen er nødvendig for at det skal eksistere en (stabil) stasjonærtilstand i tillegg til origo (som er ustabil!). Betingelsen angir formen til produktfunksjonen (som er konkav). Matematisk uttrykkes det:
$\frac{\partial Y}{\partial K} > 0 \quad \frac{\partial Y}{\partial L} > 0 \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial K^2} < 0 \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial L^2} < 0$
La oss videre vise dette etter vi innfører Cobb-Douglas-produktfunksjonen av formen $Y = AK^\alpha L^{1-\alpha}$, som vi setter på intensivform ved å benytte at Cobb-Douglas også har konstant skalautbytte:

$$\begin{gathered}
\frac{Y}{L} = A(\frac{K}{L})^\alpha (\frac{L}{L})^{1-\alpha} \\
\frac{Y}{L} := y, \frac{K}{L} := k, (\frac{L}{L})^{1-\alpha} = 1 \\
\Rightarrow y = Ak^\alpha \\
f(k) = Ak^\alpha \\
f'(k) = \alpha Ak^{\alpha-1} \\
f''(k) = (\alpha - 1)\alpha Ak^{\alpha-2}
\end{gathered} \tag{8}$$

Siden $\alpha \in (0, 1)$ og enhver potensfunksjon er positiv, har vi at $f'(k) > 0$. Og $\alpha \in (0, 1) \Leftrightarrow (\alpha - 1) \in (-1, 0) \Rightarrow f''(k) < 0$. Ergo er produktfunksjonen en strengt voksende, strengt konkav graf. Merk at dette impliserer at produktfunksjonen aldri skal vende nedover! (Se Figur 1)

2.2.1 Tolkning av de deriverte

Dette impliserer at produktfunksjonen er strengt konkav, og at den marginale enheten av en innsatsfaktor alltid gir økt produksjon. (Derfor er det så viktig ikke å tegne produktfunksjonen eller investeringslinja slik at den går ned igjen!) *En økning i kapital per arbeider gir alltid økt produksjon per arbeider, men økningen blir mindre og mindre jo større kapital per arbeider allerede er.*



Figur 1: En stigende, konkav funksjon slik produktfunksjonen er. Legg merke til hvordan den ser ut rundt origo, den er nesten loddrett før den krummer.

2.3 Essensielle produksjonsfaktorer

Det må brukes noe av begge innsatsfaktorer for positiv produksjon, altså: $F(0, L) = 0$ og $F(K, 0) = 0$

2.4 Inada-betingelser

Disse sikrer at den første enheten kapital gir tilstrekkelig stor avkastning i form av produkt, slik at en stasjonærtilstand eksisterer. Med andre ord vil utgangen av investeringslinja gitt denne betingelsen alltid ligge over utgangen på depresieringslinja. Matematisk uttrykkes dette som en grense, der vi ser på hva som skjer på marginen dersom k går mot 0 eller uendelig.

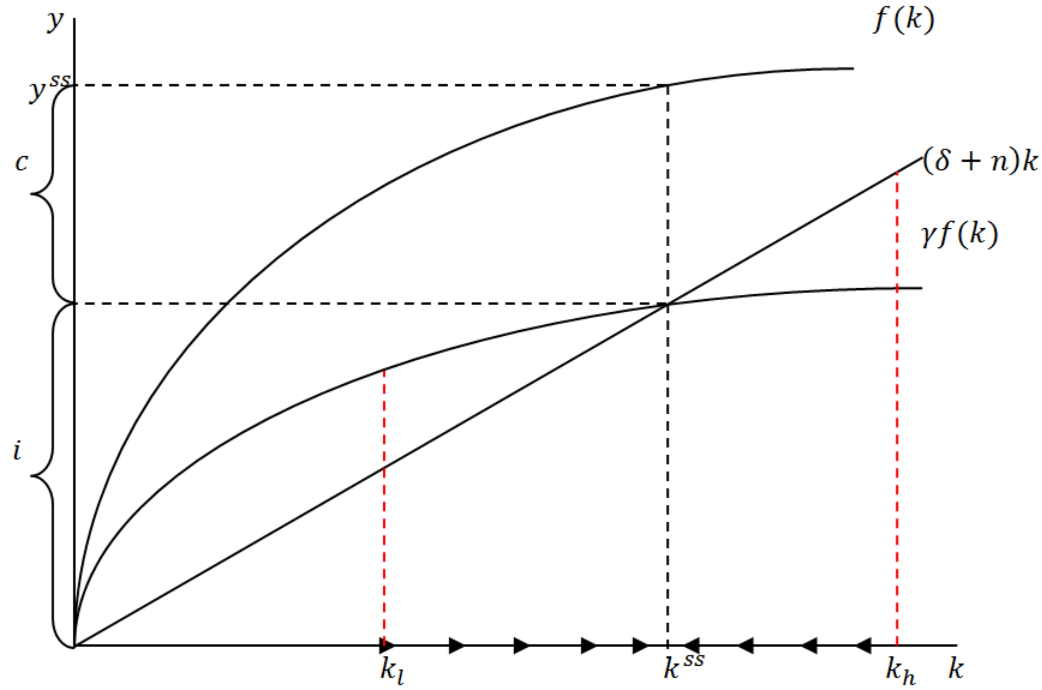
$$\lim_{k\to 0} \frac{\partial f(k)}{\partial k} = \infty \qquad \lim_{k\to \infty} \frac{\partial f(k)}{\partial k} = 0$$

Dette sier oss noe av det samme som «positiv, men avtagende grenseproduktivitet». Men det er en strengere betingelse som sikrer at utgangen på investeringslinja er «uendelig bratt».

3 Dynamikk og transisjon mot stasjonærtilstanden

3.1 Figur og dynamikkforklaring

Fra kapittel 1 og 2 har vi nå nok informasjon til grafisk å fremstille Solow-modellen. Modell-oppsettet fra kapittel 1 gir oss informasjonen vi trenger om sammenhengene, mens kapittel 2 gir oss formen på produktfunksjonen.



Figur 2: Solow-modellen tegnet ut fra informasjonen i kapittel 1 og 2. Punkter på horisontal-aksen markerer tilstander utenfor stasjonærtilstanden.

Inkludering av befolkningsvekst gir oss "ekstra fortynning" av kapital per arbeider. Vi tolker nå "depresiering av kapital per arbeider og kapitalfortynnelse som følge av befolkningsvekst" under ett som "effektiv depresiering".

Av Figur 2 kan vi se at:

1. $k_l < k_{ss}$
2. $k = k_{ss}$
3. $k_h > k_{ss}$

- I tilfelle 1. har vi at $(\delta + n)k < \gamma f(k)$ slik at det investeres mer enn effektiv depresiering av kapital per arbeider, og dermed vil kapital per arbeider vokse over tid. Vi beveger oss mot høyre i figuren til vi er i steady-state.
- I tilfelle 2. er vi i steady-state, og $(\delta + n)k = \gamma f(k)$ slik at $\dot{k} = \gamma y - (\delta + n)k = 0$

- I tilfelle 3. har vi at $(\delta + n)k > \gamma f(k)$ slik at effektiv depresiering av kapital per arbeider er større enn investeringene, og kapital per arbeider synker over tid. Vi beveger oss derfor mot venstre i figuren til vi igjen er i steady-state. Dette argumenterer for at stasjonærtilstanden er den eneste stabile tilstanden i modellen.

Hva med origo?
I origo vil en liten økning i kapital per arbeider gjøre slik at investeringene overstiger den effektive depresieringen. Dermed vil kapital per arbeider vokse helt til vi er i stasjonærtilstanden.

3.2 Om stasjonærløsningen

Stasjonærtilstanden er der modellen er i en tilstand av ro, og dette skjer når alle modellens variable derivert med hensyn på tiden er 0 (det vil si at ingen av variablene endres over tid → konsum per arbeider er konstant, kapital per arbeider er konstant, og så videre). I den fulle modellen, altså ikke satt i "per arbeider", vil det tilsvarende være at alle modellens variable vokser med en konstant rate over tid.
$\dot{c}=\dot{k}=\dot{i}=\dot{y}= 0$
Og dette betyr at vi har:

$$\dot{k}= \gamma f(k) - (\delta + n)k = 0$$
$$\gamma f(k^{ss}) = (\delta + n)k^{ss}$$

La oss innføre Cobb-Douglas-produktfunksjonen og vise en (eksplisitt) løsning for stasjonærløsningen til k og y i dette tilfellet.

$$Y = AK^{\alpha}L^{1-\alpha} \tag{9}$$

Og vi bruker (8). Vi kan nå løse for k i stasjonærtilstanden:

$$k^{ss} = \frac{\gamma f(k)}{\delta + n}$$
$$k^{ss} = A(k^{ss})^{\alpha}\frac{\gamma}{\delta + n}$$
$$\frac{k^{ss}}{(k^{ss})^{\alpha}} = A\frac{\gamma}{\delta + n}$$
$$(k^{ss})^{1-\alpha} = A\frac{\gamma}{\delta + n}$$
$$k^{ss} = [A\frac{\gamma}{\delta + n}]^{\frac{1}{1-\alpha}} \tag{10}$$

Om vi nå setter (10) inn i (8), får vi:

$$y^{ss} = A\{[A\frac{\gamma}{\delta + n}]^{\frac{1}{1-\alpha}}\}^{\alpha}$$

Og her bruker vi potensregneregelen, slik at vi multipliserer inn den ytterste potensen på følgende måte:

$$y^{ss} = A[A\frac{\gamma}{\delta + n}]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

Herfra husker vi at to faktorer opphøyet i samme eksponent er hver av faktorene opphøyet i eksponenten, slik at vi kan trekke ut A fra klammeparentesen. Samtidig husker vi at en enkelt faktor (slik som A) kan skrives som en potens der eksponenten er en brøk med samme teller og nevner (altså 1).

$$y^{ss} = A^{\frac{1-\alpha}{1-\alpha}} A^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} [\frac{\gamma}{\delta + n}]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

$$y^{ss} = A^{\frac{1}{1-\alpha}} [\frac{\gamma}{\delta + n}]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \tag{11}$$

Dette er løsningen for stasjonærtilstanden når produktfunksjonen er Cobb-Douglas.

3.2.1 Hastighet i konvergens og transisjon mot stasjonærtilstanden

Vi bruker nå (7) til å finne et uttrykk for vekstraten til k, og samtidig innfører vi (9):

$$\frac{\dot{k}}{k} = \frac{\gamma A k^{\alpha}}{k} - \frac{(\delta + n)k}{k}$$

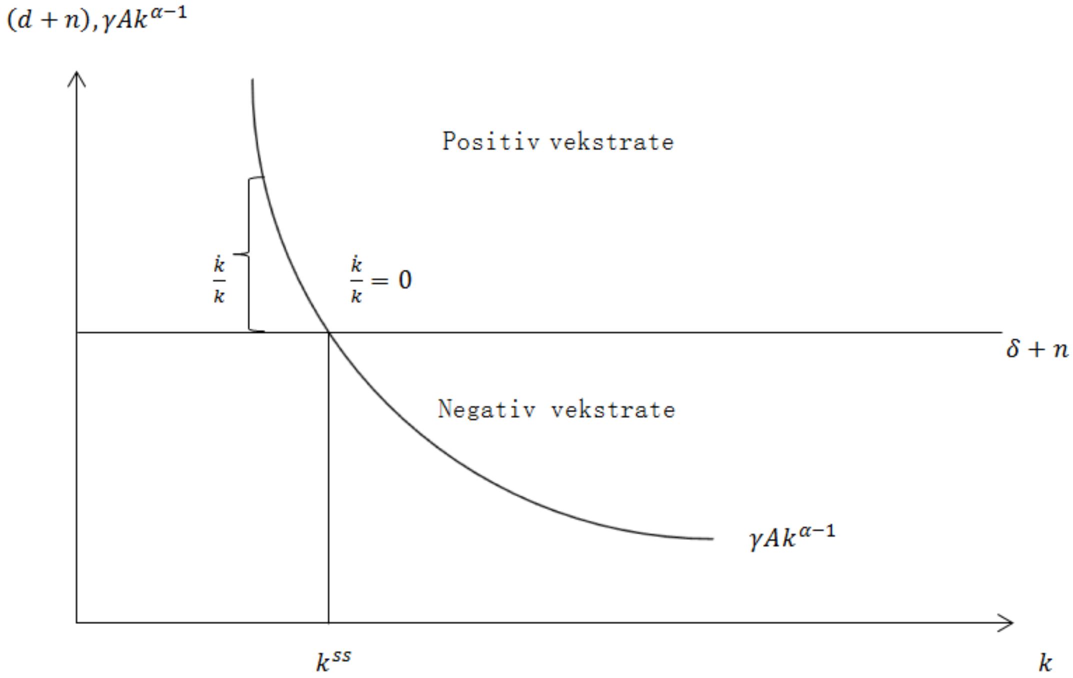
$$\frac{\dot{k}}{k} = \gamma A k^{\alpha - 1} - (\delta + n)$$

Vi ser at det siste leddet er uavhengig av kapital per arbeider, og vil derfor være en horisontal linje i Figur 3. Det første leddet kan vi finne formen på ved å derivere og dobbeltderivere med hensyn på kapital per arbeider:

$$\frac{d}{dk}\gamma A k^{\alpha-1} = (\alpha - 1)\gamma A k^{\alpha-2} < 0$$

$$\frac{d^2}{dk^2}\gamma A k^{\alpha-1} = (\alpha - 1)(\alpha - 2)\gamma A k^{\alpha-3} > 0$$

Fortegnene følger samme resonnement som i kapittel 2.2. Vi kan derfor konkludere at det første leddet er en strengt fallende, strengt konveks kurve.



Figur 3: Figuren viser hvordan vekstraten til kapital per arbeider avhenger av avstanden til stasjonærtilstanden.

Vi er nå klare til å tegne et diagram som viser hastighet i konvergens mot stasjonærtilstanden. (Se Figur 3). Vekstraten er her gitt som den vertikale avstanden mellom grafene.

Vi ser at vekstraten til kapital per arbeider blir større (i absoluttverdi) jo lenger unna stasjonærtilstanden vi er. Vi sier videre at hastigheten på konvergensen øker med avstanden til stasjonærtilstanden.