**Økonomisk institutt**
November 2003
Arne Strøm

Her er løsningen av oppgave 14.5.7 i MA I, inklusive den delen som jeg ikke riktig fikk til på forelesningen 25. november.

**MA I, 14.5.7**

(a) Med Lagrange-funksjonen

$$\mathcal{L}(x,y,z) = x + z - \lambda(x^2 + y^2 - 1) - \mu(x + y + e^z - 2)$$

får vi de nødvendige betingelsene

$$
\begin{aligned}
&(1) \qquad & \mathcal{L}'_1(x,y,z) &= 1 - 2\lambda x - \mu = 0 \\
&(2) \qquad & \mathcal{L}'_2(x,y,z) &= \phantom{1} - 2\lambda y - \mu = 0 \\
&(3) \qquad & \mathcal{L}'_3(x,y,z) &= 1 - \mu e^z = 0 \\
&(4) \qquad & x^2 + y^2 &= 1 \\
&(5) \qquad & x + y + e^z &= 2
\end{aligned}
$$

(Her har vi kalt Lagrange-multiplikatorene $\lambda$ og $\mu$ i stedet for $\lambda_1$ og $\lambda_2$. Da blir det litt greiere når vi nedenfor skal bruke fotskrifter for å skille mellom verdiene av multiplikatorene i forskjellige punkter.)

Av (3) får vi $\mu = 1/e^z \neq 0$, som innsatt i (2) gir $y \neq 0$ og $2\lambda = -\mu/y = -1/(ye^z)$. Dermed gir (1) at

$$1 + \frac{x}{ye^z} - \frac{1}{e^z} = 0.$$

Av dette får vi $e^z = 1 - x/y$, som innsatt i (5) gir

$$x + y + 1 - \frac{x}{y} = 2, \quad \text{dvs.} \quad xy + y^2 + y - x = 2y.$$

Omordning gir $xy + y^2 - x - y = 0$, altså

$$(6) \qquad (x+y)(y-1) = 0.$$

**A.** Anta først at $\underline{y = 1}$. Da gir (4) at $x = 0$, og (5) gir $e^z = 2 - x - y = 1$, så $z = 0$. De tilsvarende verdiene av Lagrange-multiplikatorene er $\lambda = -1/(2ye^z) = -1/2$ og $\mu = 1/e^z = 1$. Vi har dermed funnet én løsningskandidat, nemlig

$$(x_1, y_1, z_1, \lambda_1, \mu_1) = (0, 1, 0, -1/2, -1).$$

**B.** Anta så at $\underline{y \neq 1}$. Ligning (6) gir da $y = -x$, og (5) gir $z = \ln 2$. Av (4) får vi $2x^2 = 1$, så $x = \pm 1/\sqrt{2} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Videre har vi $\mu = 1/e^z = \frac{1}{2}$ og $\lambda = -1/(2ye^z) = -1/(4y) = 1/(4x)$. Dette gir oss de to løsningskandidatene

$$
\begin{aligned}
(x_2, y_2, z_2, \lambda_2, \mu_2) &= (\tfrac{1}{2}\sqrt{2},\ -\tfrac{1}{2}\sqrt{2},\ \ln 2,\ \tfrac{1}{4}\sqrt{2},\ \tfrac{1}{2}),\\
(x_3, y_3, z_3, \lambda_3, \mu_3) &= (-\tfrac{1}{2}\sqrt{2},\ \tfrac{1}{2}\sqrt{2},\ \ln 2,\ -\tfrac{1}{4}\sqrt{2},\ \tfrac{1}{2}).
\end{aligned}
$$

Nå er

$$
\begin{aligned}
f(x_1, y_1, z_1) &= x_1 + z_1 = 0,\\
f(x_2, y_2, z_2) &= x_2 + z_2 = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} + \ln 2,\\
f(x_3, y_3, z_3) &= x_3 + z_3 = -\tfrac{1}{2}\sqrt{2} + \ln 2,
\end{aligned}
$$

så maksimumspunktet er $(x_2, y_2, z_2) = (\frac{1}{2}\sqrt{2},\ -\frac{1}{2}\sqrt{2},\ \ln 2)$.

(b) Endringen i maksimumsverdien blir

$$
\Delta f^* \approx \lambda\,\Delta c_1 + \mu\,\Delta c_2 = \tfrac{1}{4}\sqrt{2}\cdot 0.05 + \tfrac{1}{2}(-0.05) = \tfrac{1}{80}\sqrt{2} - \tfrac{1}{40} \approx -0.0073.
$$