Jon Vislie, 26-10-09
Hand-out #5; ECON 3610 – høsten 2009-10-26

Optimal forsyning av et kollektivt gode[1]

Et kollektivt gode (et fellesgode) er kjennetenet ved ikke-rivalisering i forbruket, i motsetning til rene individualgoder (private goder) som nettopp er kjennetegnet ved rivalisering. Pga. ikke-rivalisering, vil en persons forbruk av et slikt gode, ikke svekke andre personers mulighet til å forbruke samme gode; av en grunn bør ikke slike goder ha noen brukerkostnad. Under visse omstendigheter bør prisen derfor være lik null, og av den grunn vil det ikke være særlig sterke incentiver til å tilby slike varer blant private, profittsøkende aktører.

I dette notatet skal vi, som på forelesningen, se nærmere på velferdsoptimal forsyning av et fellesgode, innenfor følgende modell:

(1) $x = f(n)$ — Produksjon av et individualgode i mengde x, med n som timeinnsats. Anta at $f' > 0, f'' < 0$.

(2) $G = F(m)$ — Produksjon av fellesgodet G ved bruk av arbeidstimer m. Anta at $F' > 0, F'' < 0$.

(3) $x = \sum_{h=1}^{H} c_h$ — Samlet tilgang av individualgodet er lik samlet anvendelse, der c_h er forbruk til husholdning $h = 1, 2, ..., H$, med H husholdninger i alt.

(4) $n + m = \sum_{h=1}^{H} N_h$ — Samlet anvendelse av arbeidstimer (arbeidskraft) er lik samlet tilgang eller tilbud; der N_h er arbeidstilbud fra husholdning $h = 1, 2, ..., H$.

Hver husholdning, f.eks. husholdning h, har vanlige preferanser eller nytte over de to godene, c_h og G, og arbeidsoffer N_h, med $U^h(c_h, N_h, G)$ for $h = 1, 2, ..., H$. Her er de partielle deriverte $U_c^h := \frac{\partial U^h}{\partial c_h} > 0, U_N^h := \frac{\partial U^h}{\partial N_h} < 0$ og $U_G^h := \frac{\partial U^h}{\partial G} > 0$, og som oppviser vanlige avveininger gitt ved krumning på indifferenskurver. (Legg merke til at det ikke er knyttet en fotskrift til fellesgodet, slik som for individualgoder.)
Vi har i alt 4 likninger mellom *2H+4* variable: $x, G, n, m, c_1, c_2, ..., c_H, N_1, N_2, ..., N_H$.

Vi introduserer en planlegger som har en velferdsfunksjon som en veid sum av de enkelte husholdningers nytte (kardinal og sammenliknbar nytte), gitt som:

[1] Dette notatet er ment som et supplement til avsnitt 4.3 i Strøm – Vislie.

$W = \sum_{h=1}^{H} \alpha_h U^h(c_h, N_h, G)$ der α_h er den vekt – eksogent gitt og bestemt av politiske forhold – husholdning *h* har i denne sosiale avveiningsfunksjonen. Ved hjelp av denne funksjonen vil vi plukke ut ett av de Pareto-optimale punktene. Dette gjør vi ved å maksimere W med (1) – (4) som bibetingelser.

Ved indre løsning vil vi kunne anvende Lagranges metode, med μ som Lagrangemultiplikator tilordnet (1), η til (2), λ til (3) og δ til (4) slik at Lagrangefunksjonen blir:

$$L = \sum_{h=1}^{H} \alpha_h U^h(c_h, N_h, G) - \lambda(\sum_{h=1}^{H} c_h - x) - \mu(x - f(n)) - \eta(G - F(m)) - \delta(n + m - \sum_{h=1}^{H} N_h)$$

Et (indre) velferdsoptimum må oppfylle:

(5) $\frac{\partial L}{\partial c_h} = \alpha_h \cdot U_c^h - \lambda = 0$

(6) $\frac{\partial L}{\partial N_h} = \alpha_h \cdot U_N^h + \delta = 0$

(7) $\frac{\partial L}{\partial x} = \lambda - \mu = 0$

(8) $\frac{\partial L}{\partial n} = \mu f'(n) - \delta = 0$

(9) $\frac{\partial L}{\partial m} = \eta F'(m) - \delta = 0$

(10) $\frac{\partial L}{\partial G} = \sum_{h=1}^{H} \alpha_h U_G^h - \eta = 0$

Fra (5) har vi en betingelse som kan skrives som: $(*)$ $\alpha_1 U_c^1 = \alpha_h U_c^h$ for $h = 2, 3, ..., H$. Denne sier at i et velferdsoptimum skal sosialveid grensenytte av konsum av individualgodet være den samme mellom husholdninger. Et fordelingsprinsipp etter den utilitaristiske velferdsfunksjonen.

Fra (5) og (6) finner vi: $(**)$ $MSB_{c,N}^h := \frac{U_c^h}{-U_N^h} = \frac{\lambda}{\delta} = \frac{1}{f'(n)}$, siste likhet ved hjelp av (7) og (8). Denne gjelder for $h = 1, 2, ..., H$. En slik avveining vil gjelde for hver husholdning: Denne sier at det antall timer en vilkårlig husholdning maksimalt vil være villig til å gi opp (betale) for en marginal enhet av individualgodet (dvs. uten at nyttenivået går ned), skal være den samme for alle individer, og lik det antall timer som kreves for å øke produksjonen marginalt med en enhet av individualgodet.

Fra (10) og (9) finner vi: $\dfrac{\sum_{h=1}^{H} \alpha_h U_G^h}{\delta} = \dfrac{\eta}{\delta} = \dfrac{1}{F'(m)}$. Bruk (6) i denne som da kan skrives som: $(***)\quad \sum_{h=1}^{H} \dfrac{U_G^h}{(-U_N^h)} = \dfrac{1}{F'(m)}$ eller: *For et velferdsoptimalt nivå på forsyningen av det kollektive godet, skal samlet betalingsvilje for G, målt i timer, dvs. for alle husholdninger, være lik marginalkostnaden, i timer, i produksjonen av G-varen.*[2]

Optimal forsyning er bestemt av at det antall timer alle til sammen er villig til å betale per enhets økning i G, akkurat motsvares av hva det kreves i produksjonen å øke forsyningen av G med én enhet. (Her har vi "vertikal summering".) Bibetingelsene (1) – (4), samt de 2H optimumsbetingelsene (*), (**) og (***), gir oss da i alt 2H+4 betingelser til å bestemme våre ukjente. Vi har en determinert, velferdsoptimal allokering.

[2] Dette er én versjon av Bowen-Lindahl-Samuelson-reglen for optimal forsyning av et kollektivt gode.