Jon Vislie

ECON 3610/4610 – høsten 2017
Veiledning til seminaroppgave 2 – uke 38

Oppgave 1.

a) Avtakende MSB mellom de to godene er forklart i boka; antakelsen om at $\frac{-U_N}{U_1}$ er voksende, sier at «for å jobbe en time ekstra, må en kompenseres i form av økt konsum av vare 2, og denne kompensasjonen er større jo mer en jobber».

b) Den effektive allokeringen fastlegges som $Max_{(N_1,N)}\ U(F_1(N_1), F_2(N-N_1), N) := v(N_1, N)$, idet vi antar indre løsning. (Med to produktfunksjoner og tre balanserelasjoner, har vi 5 relasjoner mellom 7 variable. Vi har to frihetsgrader.)

For enhver gitt (optimal) N må: $\frac{\partial v}{\partial N_1} = \frac{\partial U}{\partial c_1} F_1' - \frac{\partial U}{\partial c_2} F_2' = 0$. Den nyttemessige verdsettingen av å bruke en marginal time i sektor 1, skal være lik den nyttemessige verdsettingen av å sette inn en marginal time i sektor 2. Med andre ord: $MSB(c_1, c_2) = \frac{U_1}{U_2} = \frac{F_2'}{F_1'} = MTB(x_1, x_2)$, slik som vist i avsnitt 1.1. i VCHS for gitt arbeidstilbud.

Hva bør *N* selv være, for fastholdt (optimal) verdi av N_1 eller fordeling av arbeidsstyrken? Jo da ser vi på: $\frac{\partial v}{\partial N} = \frac{\partial U}{\partial c_2} F_2' + \frac{\partial U}{\partial N} = 0 \Leftrightarrow \frac{-U_N}{U_2} = F_2'$. Denne sier at det antall enheter konsumentene må ha i kompensasjon av vare 2 for å være villig til å jobbe en time til, akkurat skal motsvares av det antall enheter av vare 2 den siste arbeidstimen faktisk kan frembringe. Vi ser at vi samlet kan skrive disse betingelsene som: $\frac{U_1}{U_2} F_1' = F_2' = \frac{-U_N}{U_2}$. Den første av disse sier: Øker vi bruken av arbeidstid med en time i sektor 1, vil vi få økt produksjon av vare 1 lik F_1'. Hver ny enhet av vare 1 vil nyttemessig bli verdsatt til MSB enheter av vare 2 – venstre side gir da den samlede verdsetting i enheter av vare 2 om vi øker timebruken i sektor 1 med en time (marginal betalingsvilje i enheter av vare 2). Denne skal i optimum avstemmes eller balanseres mot det direkte produksjonstapet av vare 2 om vi bruker en time mindre i denne sektoren. Siden økt timebruk i sektor 1 med en time må skje på bekostning av en time brukt i sektor 2, vil produksjonstapet i sektor 2 være gitt ved grenseproduktiviteten F_2'. Den siste likheten forteller hva som er nødvendig kompensasjon av vare 2 for å jobbe en time til.

c) Markedslikevekt til priser (målt i timer) for vare 1 og 2, gitt hhv. ved p og q, kan da avledes fra desentraliserte beslutninger (nytte- og profittmaksimering), til gitte priser:

$x_1(p) = c_1(p,q,R)$ Likevekt i varemarked 1

$x_2(q) = c_2(p,q,R)$ Likevekt i varemarked 2

$N_1(p) + N_2(q) = N(p,q,R)$ Likevekt i arbeidsmarkedet

$R = N + \pi_1(p) + \pi_2(q) = N + pF_1(N_1(p)) - N_1(p) + qF_2(N_2(q)) - N_2(q)$ (Innt.opptj.)

Disse fire betingelsene utgjør tre uavhengige likninger (Walras' lov), og betingelsene forteller oss hva de to realprisene og realinntekten, alle i timer, må være for at vi skal ha generell likevekt.

d) Vi har nå at nyttefunksjonen er $U(c_1, c_2)$, samtidig som vi har:

(1) $x_1 = G_1(N_1, y)$

(2) $x_2 = F_2(N_2)$

(3) $N_1 + N_2 = N$

(4) $c_1 = x_1$

(5) $x_2 = c_2 + y$

I dette tilfellet kan en velge å bruke mye (eller lite) arbeidskraft til å produsere vare 1 og dermed mindre (mer) til å produsere vare 2 som da i «mindre grad» (eller større grad) vil bli brukt som innsatsfaktor i produksjonen av vare 1. Jo mer en bruker av vare 2 som innsatsfaktor i produksjonen av vare 1, jo mindre blir igjen til direkte konsum av vare 2,men samtidig vil det kunne bli frigjort arbeidskraft fra sektor 1 som kan brukes i produksjonen av vare 2. Valget består i hvor mye skal produseres og konsumeres av de to varene og hvordan vare 1 skal produseres.

Den effektive allokeringen finner vi da som (igjen har vi to frihetsgrader) $Max_{(N_1,y)}\ \{U(G_1(N_1,y), F_2(N-N_1)-y) := v(N_1,y)\}$, og må oppfylle (ved indre løsning) følgende førsteordensbetingelser:

$\frac{\partial v}{\partial N_1} = U_1 \frac{\partial G_1}{\partial N_1} + U_2(-F_2') = 0 \Leftrightarrow U_1 \frac{\partial G_1}{\partial N_1} = U_2 F_2'$ med samme tolkning som i b).

Videre må vi ha $\frac{\partial v}{\partial y} = U_1 \frac{\partial G_1}{\partial y} - U_2 = 0$, som sier at den nyttemessige verdsettingen av å bruke en enhet til av vare 2 som innsatsfaktor i produksjonen av vare 1 akkurat motsvares av nyttetapet av lavere konsum av vare 2. Kombinerer vi disse førsteordensbetingelsene, får vi:

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{F_2'}{\frac{\partial G_1}{\partial N_1}} = \frac{1}{\frac{\partial G_1}{\partial y}}$$

Den første likheten balanserer MSB og MTB mellom de to varene, for gitt (optimalt) valg av y, mens den andre forteller, for optimal fordeling av den gitte arbeidsstyrken, at om vi skal øke produksjonen av vare 1 med en enhet ved bruk av ytterligere vareinnsats, trengs det $\frac{1}{\frac{\partial G_1}{\partial y}}$ flere enheter av y. Disse enhetene må da tas fra konsum av vare 2. Dermed er $\frac{1}{\frac{\partial G_1}{\partial y}}$ den relevante grensekostnaden eller MTB mellom de to varene når økningen i produksjonen av vare 1 skjer ved økt innsats av vare 2 som innsatsfaktor. Dermed har vi: Grensekostnaden i produksjonen av vare 1 skal være den samme uansett hvordan produksjonsøkningen gjennomføres, og denne felle grensekostnaden skal være lik marginal betalingsvilje på brukersiden. (Vi ser også at betingelsen for produksjonseffektivitet er oppfylt, siden vi kan skrive $MTSB := \frac{\frac{\partial G_1}{\partial N_1}}{\frac{\partial G_1}{\partial y}} = F_2'$. Denne sier at det antall enheter av vare 2 som direkte frembringes av å bruke ytterligere en time i sektor 2, skal være lik arbeidskraftens alternativkostnad gitt ved det antall enheter av vare 2 (som vareinnsats) som må brukes per enhets reduksjon i timebruken i sektor 1, for uendret produksjon av vare 1. Da kan vi alternativt skrive optimumsbetingelsene som:

$$\frac{U_1}{U_2}\frac{\partial G_1}{\partial N_1} = F_2' \text{ og } \frac{U_1}{U_2}\frac{\partial G_1}{\partial y} = 1$$

Den første av disse sier: Øker vi bruken av arbeidstid med en time i sektor 1, vil vi få økt produksjon av vare 1 lik grenseproduktiviteten. Hver ny enhet av vare 1 vil nyttemessig bli verdsatt til MSB enheter av vare 2 – venstre side gir da den samlede verdsetting i enheter av vare 2 om vi øker timebruken i sektor 1 med 1 time (marginal betalingsvilje i enheter av vare 2). Denne skal i optimum avstemmes eller balanseres mot det direkte produksjonstapet: Siden økt timebruk i sektor 1 med en time må skje på bekostning av en time brukt i sektor 2, vil produksjonstapet i sektor 2 være gitt ved grenseproduktiviteten av arbeidskraft i sektor 2. Den andre betingelsen forteller oss at om vareinnsatsen y øker med en enhet i sektor 1, for uendret arbeidsinnsats, vil produksjonen av vare 1 øke med $\frac{\partial G_1}{\partial y}$ enheter. (Da samlet tilgang av vare 2 er gitt, er spørsmålet hvordan denne gitte tilgangen skal brukes – til direkte konsum eller som vareinnsats – her kan en bruke badekar.) Verdsettingen av disse enhetene i enheter av vare 2 (marginal betalingsvilje) er da $\frac{U_1}{U_2}\frac{\partial G_1}{\partial y}$ som må avstemmes mot hva denne økningen i y med en enhet fortrenger. Den relevante marginalkostnaden er da det antall enheter konsum av vare 2 som dermed fortrenges; nemlig en enhet selv, gitt ved ett-tallet på høyre side i den andre betingelsen.

Oppgave 2.

a) Profitten skrevet som en funksjon av *N*, er: $\pi(N) = p \cdot \sqrt{N} - N = p \cdot N^{\frac{1}{2}} - N$. Vi ser at profitten er ikke-negativ for $0 \leq N \leq p^2$; med $\pi(0) = \pi(p^2) = 0$. $\pi(N)$, som er kontinuerlig på dette intervallet, oppnår et maksimum i $\left[0, p^2\right]$, med $\pi'(N) = \frac{1}{2} pN^{-\frac{1}{2}} - 1 = \frac{p}{2\sqrt{N}} - 1$, $\pi''(N) = -\frac{1}{4} pN^{-\frac{3}{2}} < 0$. Vi ser at $\pi'(0) = \infty$ og $\pi'(p^2) = -\frac{1}{2} < 0$. Funksjonen når dermed sitt maksimum i et indre punkt, med N^* arbeidstimer, bestemt fra $\pi'(N^*) = 0$. For en gitt realpris på ferdigvaren (målt i timer), er det profittmaksimerende antall arbeidstimer bestemt fra $\frac{p}{2\sqrt{N^*}} - 1 = 0 \Rightarrow \sqrt{N^*} = \frac{p}{2} \Rightarrow N^* = \frac{p^2}{4} = N(p)$, som er bedriftens *etterspørsel etter* *arbeidstimer*. Siden $x = \sqrt{N}$, finner vi bedriftens *tilbud av ferdigvaren* som

$x(p) = \sqrt{N(p)} = \dfrac{p}{2}$, mens den *maksimerte profitten ("profittfunksjonen")* er

$\Pi(p) = px(p) - N(p) = \dfrac{p^2}{2} - \dfrac{p^2}{4} = \dfrac{p^2}{4}$.

b) Hver arbeidstaker velger et par (c, L) som maksimerer $U(c,L) = L + \ln c$, gitt budsjettbetingelsen $pc = n + \dfrac{\Pi(p)}{H} = T - L + R \Leftrightarrow pc + L = T + R$
Optimal tilpasning for den enkelte arbeidstaker/husholdning kan vi nå finne ved å sette inn for L fra budsjettbetingelsen; $L = T + R - pc$, i nyttefunksjonen. Definer $F(c) = T + R + \ln c - pc$ som vi skal maksimere. Fra førsteordensbetingelsen $F'(c) = -p + \dfrac{1}{c} = 0$, der vi har brukt $\frac{d}{dc}\ln c = \dfrac{1}{c}$, kan vi avlede *husholdningens etterspørsel etter konsumvarer* skrevet som $c(p) = \dfrac{1}{p}$. Vi ser her at det kun er realprisen på konsum som påvirker konsumetterspørselen negativt, og slik at samlet utlegg til denne varen er konstant, siden $pc = 1$. *Etterspørselen etter denne varen er dermed nøytralelastisk, med etterspørselselastisitet lik* -1. Men da følger *etterspørsel etter fritid* direkte som $L = T + R - 1$, eller *tilbud av arbeid* som $n = T - L = 1 - R = n(R)$. Vi ser at det antall arbeidstimer en husholdning vil ønske å tilby avhenger kun av inntektskomponenten vi kalte utbytte per husholdning, *R*, og det på en negativ måte. (Siden $R = \dfrac{\Pi(p)}{H} = \dfrac{p^2}{4H}$ vil, *i likevekt*, denne inntektskomponenten avhenge positivt av prisen *p* eller negativt av reallønna $\frac{1}{p}$.)
Den maksimerte nytten eller den indirekte nyttefunksjonen er dermed:

$V(p,R) = T + R + \ln(\dfrac{1}{p}) - 1 = T + R - \ln p - 1$, der vi bruker at

$\ln(\frac{1}{p}) = \ln 1 - \ln p = 0 - \ln p$, siden $\ln 1 = 0$. Vi ser at individuell velferd er voksende i *R* og synkende i konsumprisen.

c) Vi har to markeder, ett konsumvaremarked og ett arbeidsmarked. I konsumvaremarkedet har vi et tilbud gitt ved $x(p) = \dfrac{p}{2}$ og en samlet etterspørsel, fra alle husholdninger, gitt som $H \cdot c(p) = \dfrac{H}{p}$. I arbeidsmarkedet har vi etterspørselsfunksjonen $N(p) = \dfrac{p^2}{4}$, og et samlet tilbud gitt som $H \cdot n = H \cdot (1 - R)$, der $R = \dfrac{\Pi(p)}{H} = \dfrac{p^2}{4H}$ i likevekt. Det er kun én ukjent variabel, nemlig likevektsrealprisen på konsum, betegnet $\tilde{p}$, hvilket gir mening siden Walras' lov gjelder: Likevekt i ett marked innebærer likevekt i det andre markedet; kun én uavhengig markedsklareringsbetingelse, som vi her kan uttrykke som: $H \cdot c(p) = H \cdot \dfrac{1}{\tilde{p}} = \dfrac{\tilde{p}}{2} = x(p)$. Fra denne finner vi direkte $\tilde{p}^2 = 2H \Rightarrow \tilde{p} = \sqrt{2H}$. Denne betegnes under som $\tilde{p}(H)$.

Til denne likevektsprisen har vi: $x(\tilde{p}) = \sqrt{\dfrac{H}{2}}$, $\Pi(\tilde{p}) = \dfrac{H}{2}$, med $R(\tilde{p}) = \dfrac{\Pi(\tilde{p})}{H} = \dfrac{1}{2}$ og individuelt arbeidstilbud som: $n = 1 - R = \dfrac{1}{2}$. Individuelt konsum er $c(\tilde{p}) = \dfrac{1}{\tilde{p}} = \dfrac{1}{\sqrt{2H}} = (2H)^{-\frac{1}{2}}$, mens maksimal individuell velferd er

$$V(\tilde{p}, R(\tilde{p})) = T + R(\tilde{p}) - \ln \tilde{p} - 1 = T - \frac{1}{2} - \ln((2H)^{\frac{1}{2}}) = T - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\Big[\ln 2 + \ln H\Big]$$
$$= T - \tfrac{1}{2} \cdot \Big[1 + \ln 2 + \ln H\Big] \equiv \tilde{V}.$$