JV; november 2017

Sensorveiledning eksamen ECON 3610 – Høst 2017

a)

I dette problemet skal planlegger maksimere $F(n_1, v)$ gitt at $\bar{c}_2 + v = G(n_2)$ og $n_1 + n_2 = \bar{n}$. Vi har tre variable (v, n_1, n_2), og to bibetingelser; dermed har vi én frihetsgrad som muliggjør maksimering. Avveiningen består i valget mellom å bruke mye arbeidskraft direkte til å produsere vareinnsats levert fra sektor 2, eller å bruke mye arbeidskraft i sektor 1 og dermed bruke mindre vareinnsats levert fra sektor 2. Vi kan løse dette på (minst) to måter:

Enten ved innseting: $Max_{n_1 \in [0, \bar{n}]} \; F(n_1, G(\bar{n} - n_1) - \bar{c}_2)$, med førsteordensbetingelse for indre løsning: $\frac{\partial F}{\partial n_1} + \frac{\partial F}{\partial v} \cdot \frac{\partial G}{\partial n_2} \cdot (-1) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial F}{\partial n_1} = \frac{\partial F}{\partial v} \cdot \frac{\partial G}{\partial n_2}$.

Eller ved Lagranges metode: $L = F(n_1, v) - \lambda[\bar{c}_2 + v - G(n_2)] - \mu[n_1 + n_2 - \bar{n}]$, og med at en optimal (indre) allokering må oppfylle:

$$\frac{\partial L}{\partial n_1} = \frac{\partial F}{\partial n_1} - \mu = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial n_2} = \lambda G'(n_2) - \mu = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial v} = \frac{\partial F}{\partial v} - \lambda = 0$$

Eliminering av de to Lagrangemultiplikatorene gir betingelsen i teksten.

Tolkning: På marginen skal en time brukt direkte i produksjonen av x-varen, $\frac{\partial F}{\partial n_1}$, gi samme produksjonsøkning om en bruker timen til å produsere vareinnsats brukt i sektor 1; dvs., vi får nå $G'(n_2)$ flere enheter vareinnsats som hver gir $\frac{\partial F}{\partial v}$ flere enheter av x-varen, med samlet økning i produksjonen i sektor 1 som $\frac{\partial F}{\partial v} G'(n_2)$. Hvis likheten ikke holder, vil en omfordeling av bruken av arbeidskraft gi høyere produksjon av x-varen. Med andre ord; allokeringen av den knappe arbeidskraften bestemt slik som marginalbetingelsen uttrykker, gir nettopp en produksjonseffektiv allokering. Må gjelde uansett (tillatt) nivå på $\bar{c}_2$.

b)
Problemet nå er å velge den konsumsammensetning som maksimerer nyttefunksjonen, gitt at vi har en produksjonseffektiv allokering. Denne allokeringen finner vi nå ved: $Max_{(n_1,v)} U(F(n_1,v), G(\overline{n}-n_1)-v)$ med førsteordensbetingelser:

$$\underbrace{\frac{\partial U}{\partial c_1}}_{:=U_1}\frac{\partial F}{\partial n_1}+\underbrace{\frac{\partial U}{\partial c_2}}_{:=U_2}G'(n_2)\cdot(-1)=0=\frac{\partial U}{\partial c_1}\frac{\partial F}{\partial v}-\frac{\partial U}{\partial c_2}\Rightarrow\frac{U_1}{U_2}=\frac{G'(n_2)}{\frac{\partial F}{\partial n_1}}=\frac{1}{\frac{\partial F}{\partial v}}.$$

Den siste likheten gir maksimal tilgang av vare 1 for gitt konsum av vare 2; jfr. foregående punkt. Denne likheten uttrykker at Marginal Transformasjons Brøk (MTB) mellom de to varene, for hver faktor, er den samme (eller like grensekostnader); med MTB tilnærmet som $\frac{-\Delta y}{\Delta x}$. Den første likheten sier at Marginal Substitusjons Brøk (MSB) eller bytteforhold på konsumsiden, skal være lik MTB: Det konsumentene er villig til å gi opp av vare 2 for å få en enhet til av vare 1 (verdsettingen av en marginal enhet av vare 1 i enheter av vare 2), nemlig MSB = $\frac{U_1}{U_2}$, skal balanseres eller avstemmes mot hva det ressursmessig koster å fremstille ytterligere en enhet til av vare 1: Ved økt bruk av arbeidskraft, vil det koste $\frac{G'(n_2)}{\frac{\partial F}{\partial n_1}}$ enheter av vare 2, eller ved bruk av vareinnsats er marginalkostnaden gitt ved $\frac{1}{\frac{\partial F}{\partial v}}$ enheter vareinnsats, som er nødvendig å frembringe en enhet av vare 1.

c)
Ved å multiplisere over med $\frac{\partial F}{\partial n_1}$ i betingelsene under b), får vi:

$$\frac{U_1}{U_2}\frac{\partial F}{\partial n_1}=G'(n_2)=\frac{\frac{\partial F}{\partial n_1}}{\frac{\partial F}{\partial v}}$$

Verdsettingen, i enheter av vare 2, av å bruke en time til i produksjonen av vare 1, gitt som $\frac{U_1}{U_2}\frac{\partial F}{\partial n_1}$, er lik den direkte produksjonsøkningen av vare 2 om den marginale timen brukes i sektor 2, som igjen er lik Den Marginale Tekniske

Substitusjonsbrøk (MTSB) i sektor 1; som viser hvor mye vareinnsats som kreves for å erstatte bortfallet av en time i produksjonen av x-varen for gitt x (gitt isokvant). Den siste likheten er bare en omskrivning av betingelsen for produksjonseffektivitet (her som $Max_{n_2} G(n_2)$ gitt $f(\bar{n} - n_2, v) = \bar{x}$ (gitt isokvant)).

Kan bruke både badekardiagram, produksjonsmulighetskurven med indifferenskurver, eller at løsningen på problemet gitt i avsnittet over benyttes. Her må en være nøye med hva som står på aksene.

d)
Anta at det finnes et sett av nominelle likevektspriser (p, q, w), der p er pris på x-varen, q pris på y-varen, med w som lønn per enhet arbeidskraft. (Siden kun relative priser betyr noe for tilpasningen, kan vi la en av varene være numéraire og måle de øvrige prisene i enheter av denne.)

De profittmaksimerende bedriftene i sektor 1 velger tilpasningen slik at $\pi_x = pF(n_1, v) - wn_1 - qv$ maksimeres, med tilpasningsbetingelser $p\dfrac{\partial F}{\partial n_1} - w = 0 = p\dfrac{\partial F}{\partial v} - q \Rightarrow \Pi_x(p, w, q)$ som maksimal profitt.

I sektor 2: $Maks_{n_2} \quad \pi_y = qG(n_2) - wn_2 \quad = \Pi_y(q, w)$; med tilpasningsbetingelse gitt ved $qG'(n_2) - w = 0$. Vi ser direkte at produksjonseffektivitetsbetingelsen fra foregående punkt er oppfylt: $G'(n_2) = \dfrac{w}{q} = \dfrac{\frac{\partial F}{\partial n_1}}{\frac{\partial F}{\partial v}}$; eventuelt: $\dfrac{p}{q} = \dfrac{1}{\frac{\partial F}{\partial v}} = \dfrac{\frac{p}{w}}{\frac{q}{w}} = \dfrac{\frac{1}{\frac{\partial F}{\partial n_1}}}{\frac{1}{G'(n_2)}} = \dfrac{G'(n_2)}{\frac{\partial F}{\partial n_1}}$.

Konsumentene mottar lønnsinntekt og profitt; $R := w\bar{n} + \Pi_x(p, q, w) + \Pi_y(q, w)$, og maksimerer $U(c_1, c_2)$ gitt budsjettbetingelsen $pc_1 + qc_2 = R$, med tilpasningsbetingelse gitt ved $\dfrac{U_1}{U_2} = \dfrac{p}{q}$. Dermed har vi optimumsbetingelsene oppfylt med MSB = MTB. Markedslikevekten realiserer den effektive allokeringen.

e)

Vi finner løsningen enklest via innsetting, idet vi antar indre løsning:

$$Max_{(n_1,v)}\{V(F(n_1,v),G(\overline{n}-n_1)-v;Z(v)) := \Phi(n_1,v)\}$$

$$(*)\ \frac{\partial \Phi}{\partial n_1} = \frac{\partial V}{\partial c_1}\frac{\partial F}{\partial n_1} - \frac{\partial V}{\partial c_2}G'(n_2) = 0 \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{G'(n_2)}{\dfrac{\partial F}{\partial n_1}}$$

$$(**)\ \frac{\partial \Phi}{\partial v} = \frac{\partial V}{\partial c_1}\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{\partial V}{\partial c_2} + \frac{\partial V}{\partial Z}Z'(v) = 0 \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{\dfrac{\partial F}{\partial v}}\left[1 + \frac{(-V_Z)Z'(v)}{V_2}\right]$$

Eventuelt: $(***)\quad \dfrac{V_1}{V_2}\dfrac{\partial F}{\partial n_1} = G'(n_2) = \dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial n_1}}{\dfrac{\partial F}{\partial v}}\left[1 + \dfrac{(-V_Z)Z'(v)}{V_2}\right]$

Dermed har vi vist at de betingelsene som er oppgitt, følger som et sett av effektivitetsbetingelser når det er negative eksterne virkninger slik som angitt.

f)

Jeg vil gi flere tolkninger i det følgende; uansett hvilken tolkning som legges til grunn når det gjøres riktig, bør aksepteres.

Tolkning 1:

(*) Uttrykket for $\dfrac{\partial \Phi}{\partial n_1}$ forteller oss direkte at den nyttemessige verdsettingen av den marginale timen skal være den samme for de to varene, for optimal vareinnsats v. Ren «konkurranse» om bruk av den knappe arbeidskraften.

(**) sier noe om optimal forsyning av vare 2, for optimal fordeling av arbeidskraften. Den nyttemessige verdsettingen av økt tilgang av vare 1 gjennom økt vareinnsats, $V_1\dfrac{\partial F}{\partial v}$, må gå på bekostning av konsumet av vare 2, med «en direkte fortrengningskostnad» i enheter av nytte, gitt ved V_2. I tillegg kommer et negativt ledd som fanger opp den eksterne kostnaden, i enheter av nytte, som følge av økt bruk av vareinnsats som produksjonsfaktor i sektor 1, gitt ved $[-(-V_Z)Z'(v)] < 0$. Dette er den nyttemessige verdsettingen av eksternaliteten eller «forurensingen».

Vi kan da tolke $V_1\dfrac{\partial F}{\partial v}$ som marginal verdsetting i enheter av nytte av vare 2 (avtakende i v), som i optimum skal være lik den samfunnsøkonomiske marginalkostnaden for vare 2, i enheter av nytte, (og som normalt er stigende), gitt som $V_2 + (-V_Z)Z'(v)$. Denne kan illustreres i et diagram med vare 2 langs abscisseaksen, og enheter av nytte langs ordinataksen. Fra denne er det lett å beskrive allokeringstapet i nytte av feilaktig allokering. I den uregulerte markedsløsningen vil det bli produsert for mye av vare 2, sammenliknet med den effektive allokeringen. Dvs., for mye av arbeidskraften allokeres til sektor 2 og for lite til sektor 1, som produserer x-varen med for mye vareinnsats relativt til arbeidskraft. Den uregulerte markedslikevekten gir galt faktorforhold i sektor 1 og gal sammensetning av produksjonen.

Tolkning 2:
Se på betingelsene, skrevet på formen,

$$\frac{\frac{\partial V}{\partial c_1}}{\frac{\partial V}{\partial c_2}} = \frac{G'(n_2)}{\frac{\partial F}{\partial n_1}} = \frac{1}{\frac{\partial F}{\partial v}}\left[1 + \frac{(-\frac{\partial V}{\partial Z})\cdot Z'(v)}{\frac{\partial V}{\partial c_2}}\right]$$, dvs., vi har $MSB_{1,2} = MTB^n_{1,2} = MTB^v_{1,2}$

Tolker vi $MSB_{1,2} := \frac{V_1}{V_2}$ som marginal verdsetting av vare 1, i enheter av vare 2, så skal denne være lik $MTB^n_{1,2}$ eller grensekostnaden for vare 1 (i enheter av vare 2) når økningen i vare 1 skjer ved bruk av arbeidskraft som må «hentes» fra sektor 2 (for uendret bruk av vareinnsats). Alternativt, skal den marginale verdsettingen også være lik $MTB^v_{1,2}$ som er grensekostnaden for vare 1 (i enheter av vare 2) når økningen i forsyningen av vare 1 skjer ved økt vareinnsats, for uendret bruk av arbeidskraft – og dermed gitt produksjon i sektor 2. Denne marginalkostnaden er gitt ved den «privatøkonomiske delen» $\frac{1}{\frac{\partial F}{\partial v}}$, slik vi hadde det under punkt b, og som sier hvor mange konsumenheter av vare 2 som fortrenges direkte per enhets økt vareinnsats i sektor 1. I tillegg kommer «den eksterne merkostnaden» *per enhet vareinnsats*, gitt ved $\frac{(-\frac{\partial V}{\partial Z})\cdot Z'(v)}{\frac{\partial V}{\partial c_2}}$, som har følgende innhold: Øker vi v med én enhet, vil «forurensingen» Z øke med $Z'(v)$ enheter, med en nyttemessig verdsetting (positivt regnet som kostnad) lik $(-\frac{\partial V}{\partial Z})\cdot Z'(v)$; se (**) over.

Verdsettingen av denne ekstrakostnaden i enheter av vare 2 er $\dfrac{(-\dfrac{\partial V}{\partial Z})\cdot Z'(v)}{\dfrac{\partial V}{\partial c_2}}$. Siden den samlede kostnad (i enheter av vare 2) av å øke vareinnsatsen med én enhet da er $\left[1+\dfrac{(-\dfrac{\partial V}{\partial Z})\cdot Z'(v)}{\dfrac{\partial V}{\partial c_2}}\right]$, og når samlet nødvendig økning i vareinnsats per enhets økning i produksjonen av vare 1 er $\dfrac{1}{\dfrac{\partial F}{\partial v}}$, følger den samfunnsøkonomiske merkostnaden for vare 1 i enheter av vare 2 som $\dfrac{1}{\dfrac{\partial F}{\partial v}}\left[1+\dfrac{(-\dfrac{\partial V}{\partial Z})\cdot Z'(v)}{\dfrac{\partial V}{\partial c_2}}\right]$.

Tolkning 3:

Ta utgangspunkt i (***): $\dfrac{V_1}{V_2}\dfrac{\partial F}{\partial n_1} = G'(n_2) = \dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial n_1}}{\dfrac{\partial F}{\partial v}}\left[1+\dfrac{(-V_Z)Z'(v)}{V_2}\right]$.

Denne sier at: Verdsettingen (i enheter av vare 2) av å bruke ytterligere én time i sektor 1 skal avstemmes mot hva denne time alternativt kunne ha kastet av seg direkte i sektor 2, og også mot hva denne timen brukt i sektor 1 kan bety for innsparing i form av *mindre* bruk av vareinnsats og dermed lavere forurensinger. For hver time ekstra en bruker i produksjonen av x-varen, vil en direkte kunne spare $\dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial n_1}}{\dfrac{\partial F}{\partial v}}$ enheter vareinnsats for gitt produksjon i sektor 1; dvs. lik MTSB i sektor 1. I tillegg oppnås en besparelse i form av lavere verdsetting (i enheter av vare 2) som følge av reduserte forurensinger. Som under tolkning 2, vil innholdet i hakeparentesen $\left[1+\dfrac{(-V_Z)Z'(v)}{V_2}\right]$ kunne oppfattes som gevinsten av å redusere vareinnsatsen med en enhet i sektor 1. Siden vi alt i alt vil redusere bruken av vareinnsats med MTSB enheter per time, vil $\dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial n_1}}{\dfrac{\partial F}{\partial v}}\left[1+\dfrac{(-V_Z)Z'(v)}{V_2}\right]$ være den samlede samfunnsøkonomiske marginalgevinsten, eller, om en vil, den marginale alternativkostnaden av arbeidskraft brukt i sektor 2. Om n_2 øker, må v øke for å holde samme produksjon av vare 1; dette gir økte forurensinger, med kostnad slik som angitt.

g)

Som påpekt over vil det i en uregulert markedslikevekt blir produsert for mye av vare 2 og dermed vil for mye av arbeidskraften bli brukt i sektor 2 og for lite i sektor 1. Grunnen er at så lenge ingen ekstern virkning er internalisert, f.eks. gjennom en korrekt utformet avgift på bruken av vare 2 som innsatsfaktor, vil ingen aktør ha noe incentiv til å gjøre noe annet enn hva som er privatøkonomisk lønnsomt. Allokeringstapene kan knyttes til de illustrasjonene en vil vente kandidatene vil supplere fremstillingen med. Det er bruken av vare 2 som vareinnsats som er årsaken til skadene, og dermed må denne bruken begrenses. (Allokeringstapet kan illustreres enten i et badekardiagram – for arbeidsmarkedet – eller i et vanlig «markedskryss» med skille mellom privatøkonomisk og samfunnsøkonomisk grensekostnad.)

h)

Det mest naturlige er å innføre en avgift på bruken av vare 2 som vareinnsats. Med utgangspunkt i den uregulerte likevekten fra punkt d, kan vi innføre en avgift på t kroner per enhet vareinnsats; slik at med nye likevektspriser (p,q,w) i tillegg, vil produsentene i sektor 1 tilpasse seg som:

$Max_{(n_1,v)}\ \ \pi_x = pF(n_1,v) - wn_1 - (q+t)v\ \ := \Pi_x(p,w,q+t)$ med tilpasningsbetingelser:

$p\dfrac{\partial F}{\partial n_1} - w = 0 = p\dfrac{\partial F}{\partial v} - (q+t)$.

Sektor 2: $Max_{n_2}\ \ qG(n_2) - wn_2\ \ = \Pi_y(q,w)$ med tilpasningsbetingelse $qG'(n_2) - w = 0$.

Husholdningssektoren mottar inntekter som tidligere med tillegg av skatteinntektene, $tv := T$, som en lump-sum inntekt; dvs. med samlet disponibel inntekt lik $\tilde{R} := w\bar{n} + \Pi_x(p,w,q+t) + \Pi_y(q,w) + T$, og maksimerer $V(c_1,c_2,Z)$ gitt budsjettbetingelsen $pc_1 + qc_2 = \tilde{R}$, med gitt inntekt, når de «korrekt kan forutsi nivået på Z», slik at $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{p}{q}$. Vi ser når vi bruker tilpasningsbetingelsene at:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{p}{q} = \frac{G'(n_2)}{\frac{\partial F}{\partial n_1}} = \frac{\frac{w}{q}}{\frac{w}{p}} = \frac{1}{\frac{\partial F}{\partial v}}\left[\frac{q+t}{q}\right] = \frac{1}{\frac{\partial F}{\partial v}}\left[1+\frac{t}{q}\right].$$

Om vi nå har $\frac{t}{q} = \frac{(-V_Z)Z'(v)}{V_2}$, da vil aktørene tilpasse seg slik at optimum blir realisert.

Den avgiften som her innføres har ingen negative vridningseffekter; den er tvert imot effektivitetsfremmende.

i)

Om vi skal fjerne den eksterne virkningen fullstendig, må $Z = 0$, hvilket bare, ifølge modellens antakelser, er mulig om $v = 0$. (Husk det ble antatt at $Z(0) = 0$ og med $Z'(0) > 0$.)

Den sofistikerte kandidat vil kunne se på betingelsen for at vi har en hjørneløsning:
(**) $\frac{\partial \Phi}{\partial v} = \frac{\partial V}{\partial c_1}\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{\partial V}{\partial c_2} + \frac{\partial V}{\partial Z}Z'(v)$, og si at $v = 0$ er samfunnsøkonomisk optimalt om $\frac{\partial \Phi}{\partial v}_{|v=0} = V_1\frac{\partial F(n_1, 0)}{\partial v} - V_2 - (-V_Z(0))Z'(0) < 0$, og om vareinnsats i sin helhet kan erstattes av arbeidskraft i produksjonen av x. (Hvis vareinnsats er helt nødvendig eller essensiell, vil $v = 0$ måtte innebære at $x = 0 = c_1$ og $c_2 = G(\overline{n})$.)

Vi ser at dette kan være optimalt, om leddet $(-V_Z(0))Z'(0)$ er tilstrekkelig stort. Det normale er at det alltid vil være ønskelig med noe av begge vare, på tross av at en vare skaper en negativ ekstern virkning.

Oppsummering:

En omfattende oppgave, som vil kunne belønnes med god karakter om en klarer å gi en rimelig presis tolkning av avveiningene og forklare hva resultatene sier. En må se på helheten i besvarelsen; derfor setter jeg ikke opp vekter på de enkelte spørsmålene.

Et minimumskrav for å bestå, bør være at punkt a er besvart noenlunde riktig. Men igjen, siden oppgaven dekker flere deler av pensum, kan en ha «litt riktig» både her og der, vil jeg tro.