Universitetet i Oslo
Økonomisk institutt

Obligatorisk oppgavesett 1 i ECON3120/4120 Matematikk 2

Dato for utlevering: Onsdag 25. oktober 2006

Dato for innlevering: Onsdag 8. november 2006, før 14.00

Innleveringssted: Instituttets ekspedisjonskontor i 12. etasje.

Øvrig informasjon:

- Denne øvelsesoppgaven er **obligatorisk**.
- Denne oppgaven vil IKKE bli gitt en tellende karakter. En eventuell karakter er kun veiledende.
- Du må benytte en ferdig trykket forside som du finner på *http://www.oekonomi.uio.no/info/EMNER/Forside_obl_nor.doc*
- Det er viktig at øvelsesoppgaven blir levert innen fristen (se over). Oppgaver levert etter fristen vil **ikke bli rettet**.*)
- Du må ikke levere øvelsesoppgaven direkte til emnelæreren eller ved e-post. Dersom du ønsker å levere inn oppgaven **før** innleveringsfristen, bes du kontakte instituttets ekspedisjonskontor i 12. etasje.
- Dersom øvelsesoppgaven ikke blir godkjent, vil du få en ny mulighet ved at du får en ny oppgave som skal leveres med en svært kort frist. Dersom heller ikke dette forsøket lykkes, vil du ikke få anledning til å avlegge eksamen i dette emnet. Du vil da bli trukket fra eksamen, slik at det ikke vil bli et tellende forsøk.

*) Dersom du mener at du har en god grunn til ikke å levere oppgaven innen fristen (for eksempel sykdom) bør du diskutere saken med emnelæreren, og søke om utsettelse. Normalt vil utsettelse kun bli innvilget dersom det er en dokumentert grunn (for eksempel legeerklæring).

Oppgave 1

La f være en funksjon av to variabler, gitt ved $f(x,y) = (x^2 - axy)e^y$, der $a \neq 0$ er en konstant.

(a) Finn de stasjonære punktene til f, og avgjør for hvert av dem om det er et lokalt maksimumspunkt, et lokalt minimumspunkt eller et sadelpunkt.

(b) La (x^*, y^*) være det stasjonære punktet der $x^* \neq 0$, og sett $f^*(a) = f(x^*, y^*)$. Bestem $df^*(a)/da$. Vis at om vi setter $\hat{f}(x,y,a) = (x^2 - axy)e^y$, så er

$$\hat{f}_3'(x^*, y^*, a) = \frac{df^*(a)}{da} .$$

(Forts.)

Oppgave 2

Betrakt likningssystemet

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 4 \\ 2x + \ \ y + 3z &= 2 \\ x + ty - \ \ z &= 4 \end{aligned}$$

der t er en parameter.

(a) Finn løsningene av systemet for alle verdier av t.

(b) La (x_t, y_t, z_t) være den løsningen du fant i (a). For hvilke verdier av t er $2x_t \geq y_t$?

Oppgave 3

(a) Finn den allmenne løsningen av differensiallikningen

$$t(t-1)\dot{x} + x = t^2 e^t, \qquad 0 < t < 1. \tag{D}$$

(*Vink:* Du kan ha nytte av formelen $\dfrac{1}{t(t-1)} = \dfrac{1}{t-1} - \dfrac{1}{t}$.)

(b) Vis at alle løsninger $x = x(t)$ av (D) går mot 0 når $t \to 0^+$. Vis også at bare én løsning går mot en grenseverdi når $t \to 1^-$. Bestem denne løsningen og finn grenseverdien av den når $t \to 1^-$.

Oppgave 4

I en studie av etterspørselen etter halvledere støter man på integralet

$$S = \int_0^T e^{-rx}(e^{g(T-x)} - 1)\, dx,$$

der T, r og g er positive konstanter.

(a) Vis at

$$r(e^{gT} - e^{-rT}) - (r+g)(1 - e^{-rT}) = r(r+g)S. \tag{$*$}$$

(b) Likningen $(*)$ definerer T som en funksjon av g, r og S. Finn et uttrykk for $\partial T / \partial g$.

Problem 5

Punktet $(x_0, y_0) = (1, 0)$ ligger på kurven

$$xe^y - y^2 = 2x^3 - e^{x-1}.$$

Vis at $(x_1, y_1) = (0, -4)$ ligger på tangenten til kurven i (x_0, y_0).