University of Oslo / Department of Economics **English**

ECON3120/4120 Mathematics 2

Thursday June 21 2012, 09:00–12:00

There are 2 pages of problems to be solved.

All printed and written material may be used, as well as pocket calculators.

You are required to state reasons for all your answers. Throughout the problem set, you are permitted to use without proof information from a previous part, regardless of whether you managed to solve it or not.

Grades given run from A (best) to E for passes, and F for fail.

Problem 1 In a model for finding the optimal time to sell an asset, one encounters the equation system

$$\begin{aligned} uv^t + e^{-v} - s &= 0 \\ utv^t - ve^{-v} &= 0 \end{aligned}$$

which defines u and v as continuously differentiable functions of s and t around the point P with coordinates $(s,t,u,v) = (\frac{2}{e}, 1, \frac{1}{e}, 1)$ (you are not supposed to show this).

(a) Differentiate the equation system (i.e., calculate differentials).

(b) Calculate $v'_s(\frac{2}{e}, 1)$ and $v'_t(\frac{2}{e}, 1)$.

Problem 2 Consider the differential equation

$$\dot{x}(t) = x(t) + \left[e^{2t}(t+1)\right]^2$$

(a) Find the general solution.

(b) Consider the particular solution for which $x(0) = q$, where q is a constant. Find the linear approximation to this function near $t = 0$.
(*Hint:* can you do this without solving part (a) first?)

Problem 3 Define for each real number t, the matrix $\mathbf{A}_t$ by

$$\mathbf{A}_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 2t & 0 & 0 \\ -t & 8 & 3 & 0 \\ 8 & -t & 8 & 4t \end{pmatrix}$$

and define $\mathbf{B}_t = \mathbf{A}_t - 8\mathbf{I}$, where $\mathbf{I}$ is the 4×4 identity matrix

(a) Calculate the determinant of $\mathbf{A}_t$ and the determinant of $\mathbf{B}_t$, and determine for each value of t whether the equation system $\mathbf{A}_t\mathbf{x} = \mathbf{0}$ has 0, 1, 4 or infinitely many solutions. (Here, $\mathbf{x}$ is the unknown.)

(b) Let $\mathbf{M}_t = \mathbf{A}_t\mathbf{B}_t\mathbf{B}_t'\mathbf{A}_t'$, where the $'$ denotes transpose, and consider the equation system $\mathbf{M}_t\mathbf{x} = (1, 2, 3, 4)'$ in the unknown $\mathbf{x}$.
Show that this equation system has solution for every $t < 0$.
(Note: There will be solution for most nonnegative values of t too, but you are not supposed to show that. Also, it is probably not a good idea to multiply matrices.)

Problem 4 Consider the problems

$$\max\ (x-3)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 \quad \text{subject to} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 & \leq 21 \\ x + 2y + 3z & \leq 0 \end{cases} \tag{K}$$

and (similar, except requiring the constraints to hold with equality):

$$\max\ (x-3)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 \quad \text{subject to} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 & = 21 \\ x + 2y + 3z & = 0 \end{cases} \tag{L}$$

(a) State the Lagrange conditions associated to problem (L), and state the Kuhn–Tucker conditions associated to problem (K).

(b) Show that the point $(x_0, y_0, z_0) = (-4, -1, 2)$:
(i) satisfies the Lagrange conditions associated to problem (L)
(hint: try 11/7 for the multiplier associated to the first of the constraints),
(ii) does *solve* problem (L),
(iii) but does *not* satisfy the Kuhn–Tucker conditions associated to problem (K).

(c) Consider problem (L). Approximate the *change* in optimal value caused by replacing the first constraint by $x^2 + y^2 + z^2 = 20.93$.

Universitetet i Oslo / Økonomisk institutt **Bokmål**

ECON3120/4120 Matematikk 2

Torsdag 21. juni 2012, 09:00–12:00

Oppgavesettet er på 2 sider.

Alle trykte eller skrevne hjelpemidler samt lommeregnere er tillatt.

Alle svar skal begrunnes. I alle delproblemer kan du uten bevis bruke informasjon fra en tidligere del uansett om du klarte å løse denne delen eller ikke.

Karakterskalaen går fra A (beste karakter) til E for bestått, og F for ikke bestått.

Oppgave 1 I en modell for å finne optimal tid for å selge en eiendel, møter man ligningssystemet

$$\begin{aligned} uv^t + e^{-v} - s &= 0 \\ utv^t - ve^{-v} &= 0 \end{aligned}$$

som definerer u og v som kontinuerlig deriverbare funksjoner av s og t rundt punktet P med koordinatene $(s, t, u, v) = (\frac{2}{e}, 1, \frac{1}{e}, 1)$ (dette skal du ikke vise).

(a) Differensier ligningssystemet (i.e., regn ut differensialer).

(b) Beregn $v'_s(\frac{2}{e}, 1)$ og $v'_t(\frac{2}{e}, 1)$.

Oppgave 2 Betrakt differensialligningen

$$\dot{x}(t) = x(t) + \left[e^{2t}(t+1)\right]^2$$

(a) Finn den allmenne løsningen.

(b) Betrakt den partikulære løsningen som tilfredsstiller $x(0) = q$, der q er en konstant. Finn den lineære approksimasjonen til denne funksjonen rundt $t = 0$.
(*Hint:* kan du gjøre dette uten å løse del (a) først?)

Oppgave 3 Definer for hvert reelle tall t, matrisen $\mathbf{A}_t$ ved

$$\mathbf{A}_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 2t & 0 & 0 \\ -t & 8 & 3 & 0 \\ 8 & -t & 8 & 4t \end{pmatrix}$$

og definer $\mathbf{B}_t = \mathbf{A}_t - 8\mathbf{I}$, der $\mathbf{I}$ er identitetsmatrisen av orden 4×4.

(a) Beregn determinanten til $\mathbf{A}_t$ og determinanten til $\mathbf{B}_t$, og avgjør for hver verdi av t hvorvidt ligninssystemet $\mathbf{A}_t\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har 0, 1, 4 eller uendelig mange løsninger. (Her er $\mathbf{x}$ den ukjente.)

(b) La $\mathbf{M}_t = \mathbf{A}_t\mathbf{B}_t\mathbf{B}_t'\mathbf{A}_t'$, der $'$ er notasjon for transponering, og betrakt ligningssystemet $\mathbf{M}_t\mathbf{x} = (1, 2, 3, 4)'$ mhp. $\mathbf{x}$ som ukjent.
Vis at dette ligningssystemet har løsning for enhver $t < 0$.
(Obs: Det vil finnes løsning for de fleste ikkenegative verdier av t også, men det skal du ikke vise. For øvrig er det neppe noen god idé å multiplisere matrisene.)

Oppgave 4 Betrakt problemene

$$\max\ (x-3)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 \quad \text{under bibetingelsene} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 & \leq 21 \\ x + 2y + 3z & \leq 0 \end{cases} \qquad \text{(K)}$$

og (tilsvarende, unntatt at bibetingelsene skal holde med likhet):

$$\max\ (x-3)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 \quad \text{under bibetingelsene} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 & = 21 \\ x + 2y + 3z & = 0 \end{cases} \qquad \text{(L)}$$

(a) Sett opp Lagrange-betingelsene tilhørende problem (L), og sett opp Kuhn–Tucker-betingelsene tilhørende problem (K).

(b) Vis at punktet $(x_0, y_0, z_0) = (-4, -1, 2)$:
(i) tilfredsstiller Lagrange-betingelsene tilhørende problem (L)
(hint: prøv verdien 11/7 for multiplikatoren tilordnet den første bibetingelsen),
(ii) er *løsning av* problem (L),
(iii) men *ikke* tilfredsstiller Kuhn–Tucker-betingelsene tilhørende problem (K).

(c) Betrakt problem (L). Approksimer *endringen* i verdifunksjon som følge av å erstatte første bibetingelse med $x^2 + y^2 + z^2 = 20.93$.