UNIVERSITY OF OSLO
DEPARTMENT OF ECONOMICS

Postponed exam: **ECON4120 – Mathematics 2: Calculus and linear algebra**

Date of exam: Tuesday, June 18, 2013

Time for exam: 09:00 a.m. – 12:00 noon

The problem set covers 5 pages (incl. cover sheet)

Resources allowed:
- All written and printed resources, as well as calculator is allowed

The grades given: A-F, with A as the best and E as the weakest passing grade. F is fail.

ECON3120/4120 Matematikk 2

18. juni 2013, 09:00–12:00

Oppgavesettet er på 2 sider.

Alle trykte eller skrevne hjelpemidler samt lommeregnere er tillatt.

Karakterskalaen går fra A (beste karakter) til E for bestått, og F for ikke bestått.

- Alle svar skal begrunnes.
- Du kan benytte all informasjon oppgitt i et tidligere bokstavpunkt (f.eks. "(a)") til å løse et senere (f.eks. "(c)"), uansett om du klarte å besvare det førstnevnte. Et senere bokstavpunkt trenger ikke bygge på svar på eller informasjon oppgitt i et tidligere.

Oppgave 1 La $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Regn ut $\mathbf{M}^2$, $\mathbf{M}^3$ og determinanten $|\mathbf{M}|$.

(b) Definer for hver w matrisen $\mathbf{A}_w = \mathbf{M} - w\mathbf{I}_3$, der $\mathbf{I}_3$ er identitetsmatrisen av orden 3×3. Finn de w slik at $|\mathbf{A}_w| = 0$.

For hvert reelle tall w, se på ligningssystemet (der $\mathbf{x}$ er ukjent)

$$\mathbf{A}_w \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

(c) For hvilke verdier av w har ligninssystemet entydig løsning / ingen løsning / flere løsninger?

(d) Velg én w-verdi som gir flere løsninger, og finn alle disse løsningene.

Oppgave 2 I dette problemet skal du anta $s(1 + 4suv) \neq 0$. Da vil – og dette skal du ikke vise – ligningssystemet

$$u^2 - sv + e^t = 8$$
$$t + u + s^2 v^2 = 18$$

bestemme u og v som deriverbare funksjoner av s and t.

(a) Differensier ligningssystemet (dvs. regn ut differensialer).

(b) Vis at du/ds er konstant.

Oppgave 3 La $q > 0$ være en konstant, og definer for $t \geq 0$

$$F(t) = \int_0^t \left(e^{qs+e^s} - e^{2+q}\right) ds$$

(Ikke forsøk å regne ut integralet. Observer at $F'(t) = e^{qt+e^t} - e^{2+q}$.)

(a) Vis (i) at F har et globalt minimum t^*, og (ii) at $0 < t^* < 1$.

(b) Finn følgende grenseverdier, eller vis at de ikke eksisterer:

$$\text{(i)} \quad \lim_{t\to+\infty} F(t), \qquad \text{(ii)} \quad \lim_{t\to+\infty} \frac{F(t)}{t} \qquad \text{and} \qquad \text{(iii)} \quad \lim_{t\to 0^+} \frac{F(t)}{t}$$

(c) t^* fra del (a) er en funksjon $g(q)$. Finn et uttrykk for $g'(q)$.

Oppgave 4 La f og g være funksjonene definert for alle x, y ved

$$f(x,y) = x^2 + 2x(y-1) - 2y + 10y^2 + 6y^3, \qquad g(x,y) = x - y^2$$

(a) Finn stasjonærpunktene til f. (Det er flere enn ett.)

(b) Klassifiser disse stasjonærpunktene. (Det kreves kun at du anvender verktøyene fra kurset.)

I det følgende, se på problemene

$$\text{maksimer/minimer } f(x,y) \qquad \text{når} \quad g(x,y) = 1$$

(c) Sett opp de tilhørende Lagrange-betingelsene, og vis at de er tilfredsstilt for stasjonærpunktene til f.

(d) Det er ytterligere ett punkt som tilfredsstiller Lagrange-betingelsene. Finn dette.

(e) Vil noen av punktene som tilfredsstiller Lagrange-betingelsene, løse (i) maksimeringsproblemet eller (ii) minimeringsproblemet?
(Denne delen kan gjøres med andre verktøy enn Lagranges metode.)

University of Oslo / Department of Economics **English**

ECON3120/4120 Mathematics 2

June 18 2013, 09:00–12:00

There are 2 pages of problems to be solved.

All printed and written material may be used, as well as pocket calculators.

Grades given run from A (best) to E for passes, and F for fail.

- You are required to state reasons for all your answers.
- You are permitted to use any information stated in an earlier letter-enumerated item (e.g. "(a)") to solve a later one (e.g. "(c)"), regardless of whether you managed to answer the former. A later item does not necessarily require answers from or information given in a previous one.

Problem 1 Let $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Calculate $\mathbf{M}^2$, $\mathbf{M}^3$ and the determinant $|\mathbf{M}|$.

(b) Define for each w the matrix $\mathbf{A}_w = \mathbf{M} - w\mathbf{I}_3$, where $\mathbf{I}_3$ is the 3×3 identity matrix. Find those w for which $|\mathbf{A}_w| = 0$.

Consider for each real number w the equation system (where $\mathbf{x}$ is the unknown)

$$\mathbf{A}_w\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

(c) For what values of w does the equation system have unique solution / no solutions / several solutions?

(d) Pick (by your choice!) one w value for which there are several solutions, and find all those solutions.

Problem 2 In this problem, suppose $s(1 + 4suv) \neq 0$. Then it is a fact – and you are not supposed to show – that the equation system

$$u^2 - sv + e^t = 8$$
$$t + u + s^2v^2 = 18$$

determines u and v as differentiable functions of s and t.

(a) Differentiate the equation system (i.e. calculate differentials).

(b) Show that du/ds is a constant.

Problem 3 Let $q > 0$ be a constant, and define for $t \geq 0$

$$F(t) = \int_0^t \left(e^{qs+e^s} - e^{2+q} \right) ds$$

(Do not try to evaluate the integral. Observe that $F'(t) = e^{qt+e^t} - e^{2+q}$.)

(a) Show (i) that F has a global minimum t^*, and (ii) that $0 < t^* < 1$.

(b) Find the following limits, or show that they do not exist:

$$\text{(i)} \quad \lim_{t \to +\infty} F(t), \qquad \text{(ii)} \quad \lim_{t \to +\infty} \frac{F(t)}{t} \qquad \text{and} \qquad \text{(iii)} \quad \lim_{t \to 0^+} \frac{F(t)}{t}$$

(c) The t^* from part (a), is a function $g(q)$. Find an expression for $g'(q)$.

Problem 4 Let f and g be the functions defined for all x, y as

$$f(x,y) = x^2 + 2x(y-1) - 2y + 10y^2 + 6y^3, \qquad g(x,y) = x - y^2$$

(a) Find the stationary points of f. (There are more than one.)

(b) Classify these stationary points. (You are only required to apply the tools given in the course.)

In the following, consider the problems

$$\text{maximize/minimize } f(x,y) \qquad \text{subject to} \quad g(x,y) = 1$$

(c) State the associated Lagrange conditions and show that they are satisfied for the stationary points of f.

(d) There is one more point that satisfies the Lagrange conditions. Find it.

(e) Does any of the points which satisfy the Lagrange conditions, actually solve (i) the maximization problem, or (ii) the minimization problem?
(This part may be done by other tools than Lagrange's method.)