UNIVERSITETET I OSLO
ØKONOMISK INSTITUTT

Eksamen i: **ECON3120/4120 – Matematikk 2: Matematisk analyse og lineær algebra**
Exam: ECON3120/4120 – Mathematics 2: Calculus and Linear Algebra

Eksamensdag: Fredag 23. mai 2014 **Sensur kunngjøres: 11. juni 2014**
Date of exam: Friday, May 23, 2014 ***Grades will be given: June 11, 2014***

Tid for eksamen: kl. 14.30 – 17.30
Time for exam: 2.30 p.m. – 5.30 p.m.

Oppgavesettet er på 5 sider (inkl. forsiden)
The problem set covers 5 pages (incl. cover sheet) ***English version on page 4***

Tillatte hjelpemidler:
- Alle trykte og skrevne hjelpemidler, inklusive kalkulator er tillatt

Resources allowed:
- *All written and printed resources, including calculator is allowed*

Eksamen blir vurdert etter ECTS-skalaen. A-F, der A er beste karakter og E er dårligste ståkarakter. F er ikke bestått.

The grades given: A-F, with A as the best and E as the weakest passing grade. F is fail.

Universitetet i Oslo / Økonomisk institutt **Bokmål (English version included)**

ECON3120/4120 Matematikk 2

23. mai 2014, 1430–1730.

Oppgavesettet er på 2 sider.

Alle trykte eller skrevne hjelpemidler samt lommeregnere er tillatt.

Karakterskalaen går fra A (beste karakter) til E for bestått, og F for ikke bestått.

- Alle svar skal begrunnes.
- Du kan benytte all informasjon oppgitt i et tidligere bokstavpunkt (f.eks. "(a)") til å løse et senere (f.eks. "(c)"), uansett om du klarte å besvare det førstnevnte. Et senere bokstavpunkt trenger ikke bygge på svar på eller informasjon oppgitt i et tidligere.

Oppgave 1 Definer matrisen $\mathbf{A}$ og for hvert reelle tall t matrisen $\mathbf{M}_t$ ved

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{M}_t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2t & -t & 0 \\ -t & -t & 1 \end{pmatrix}$$

(a) i) Regn ut $\mathbf{S}_t = t\mathbf{A} + \mathbf{M}_t$.

ii) Regn ut $\mathbf{P}_t = \mathbf{A}\mathbf{M}_t$.

iii) For hvilke t har $\mathbf{Q}_t = \mathbf{M}_t\mathbf{A}$ en invers?

(b) Finn en t slik at vektoren

$$\mathbf{x} = \mathbf{M}_t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

er en løsning av ligningssystemet

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(c) La t være verdien fra del (b).

i) Hvorfor er det slik at vektoren $\mathbf{x} = \mathbf{M}_t\ (a,\ b,\ c)'$ er en løsning av ligningssystemet $\mathbf{A}\mathbf{x} = (a,\ b,\ c)'$ uansett hva a, b og c er?

ii) Kan det finnes andre løsninger, for noen verdier av a, b, c?

Oppgave 2

(a) Regn ut integralet $\displaystyle\int_1^T te^{4t}\,dt.$

(b) Finn den allmenne løsningen av differensialligningen $\dot{x} = 3x^2\,te^{4t}.$

(c) Finn den partikulære løsningen av differensialligningen $\dot{x} = 3x + te^{7t}$, slik at $x(1) = 2$.

Oppgave 3 Let $f(x,y) = \ln x + xy - y^2 - 2y\sqrt{3}.$

(a) Finn og klassifiser de to stasjonærpunktene til f.

(b) Har f noen *globale* ekstrempunkter?

Se på det ikkelineære programeringsproblemet

$$\text{maksimer } f(x,y) \qquad \text{når} \qquad x + y \le 1, \qquad y \ge 0 \tag{P}$$

(c) Sett opp Kuhn–Tucker-betingelsene, og verifiser at de er tilfredsstilt i punktet $(x,y) = (1,0)$.

(d) Vis at $(x,y) = (1,0)$ løser problemet (P).

(e) Omtrent hvor mye vil den optimale verdien reduseres om beskrankningen $y \ge 0$ skjerpes til å kreve $y \ge 1/200$?

Oppgave 4 Anta at $h(x,y)$ er homogen av grad k, og la $H(x,y) = h(x,y) + k$.
Finn alle k slik at H er homogen, og finn alle k slik at H er homotetisk.

University of Oslo / Department of Economics **English version**

ECON3120/4120 Mathematics 2

May 23rd 2014, 1430–1730.

There are 2 pages of problems to be solved.

All printed and written material may be used, as well as pocket calculators.

Grades given run from A (best) to E for passes, and F for fail.

- You are required to state reasons for all your answers.
- You are permitted to use any information stated in an earlier letter-enumerated item (e.g. "(a)") to solve a later one (e.g. "(c)"), regardless of whether you managed to answer the former. A later item does not necessarily require answers from or information given in a previous one.

Problem 1 Define the matrix $\mathbf{A}$ and for each real number t the matrix $\mathbf{M}_t$ by

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{M}_t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2t & -t & 0 \\ -t & -t & 1 \end{pmatrix}$$

(a) i) Calculate $\mathbf{S}_t = t\mathbf{A} + \mathbf{M}_t$.

ii) Calculate $\mathbf{P}_t = \mathbf{A}\mathbf{M}_t$.

iii) For what t does $\mathbf{Q}_t = \mathbf{M}_t\mathbf{A}$ have an inverse?

(b) Find a t such that the vector

$$\mathbf{x} = \mathbf{M}_t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

is a solution of the equation system

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(c) Let t be the number from part (b).

i) Why is it so that the vector $\mathbf{x} = \mathbf{M}_t\ (a,\ b,\ c)'$ is a solution of the equation system $\mathbf{A}\mathbf{x} = (a,\ b,\ c)'$ no matter what a, b and c?

ii) Could there be other solutions, for any values of a, b, c?

Problem 2

(a) Calculate the integral $\int_1^T te^{4t}\,dt$.

(b) Find the general solution of the differential equation $\dot{x} = 3x^2\,te^{4t}$.

(c) Find the particular solution of the differential equation $\dot{x} = 3x + te^{7t}$, such that $x(1) = 2$.

Problem 3 Let $f(x,y) = \ln x + xy - y^2 - 2y\sqrt{3}$.

(a) Find and classify the two stationary points of f.

(b) Does f have any *global* extreme point(s)?

Consider the nonlinear programming problem

$$\max f(x,y) \qquad \text{subject to} \qquad x + y \leq 1, \qquad y \geq 0 \tag{P}$$

(c) State the Kuhn–Tucker conditions and verify that they are satisfied at the point $(x,y) = (1,0)$.

(d) Show that $(x,y) = (1,0)$ solves problem (P).

(e) Approximately how much will the optimal value be reduced if the constraint $y \geq 0$ is tightened to require $y \geq 1/200$?

Problem 4 Assume that $h(x,y)$ is homogeneous of degree k, and let $H(x,y) = h(x,y) + k$. Find all k such that H is homogeneous, and find all k such that H is homothetic.