UNIVERSITETET I OSLO
ØKONOMISK INSTITUTT

Eksamen i: **ECON3120/4120 – Matematikk 2: Matematisk analyse og lineær algebra**
Exam: ECON3120/4120 – Mathematics 2: Calculus and Linear Algebra

Eksamensdag: Onsdag 16. desember 2015 **Sensur kunngjøres: 6. januar 2016**
Date of exam: Wednesday, December 16, 2015 ***Grades will be given: January 6, 2016***

Tid for eksamen: kl. 14.30 – 17.30
Time for exam: 2.30 p.m. – 5.30 p.m.

Oppgavesettet er på 5 sider (inkl. forsiden)
The problem set covers 5 pages (incl. cover sheet) ***English version on page 4***

Tillatte hjelpemidler:
- Åpen bok eksamen, der alle skrevne og trykte hjelpemidler – også kalkulator – er tillatt

Resources allowed:
- *Open book exam, where all written and printed resources – as well as calculator – are allowed*

Eksamen blir vurdert etter ECTS-skalaen. A-F, der A er beste karakter og E er dårligste ståkarakter. F er ikke bestått.

The grades given: A-F, with A as the best and E as the weakest passing grade. F is fail.

Universitetet i Oslo / Økonomisk institutt **Bokmål (English version included)**

ECON3120/4120 Matematikk 2

16. desember 2015, 1430–1730.

Oppgavesettet er på 2 sider.

Alle trykte eller skrevne hjelpemidler samt lommeregnere er tillatt.

Karakterskalaen går fra A (beste karakter) til E for bestått, og F for ikke bestått.

- Alle svar skal begrunnes.
- Du kan benytte all informasjon oppgitt i et tidligere bokstavpunkt (f.eks. "(a)") til å løse et senere (f.eks. "(c)"), uansett om du klarte å besvare det førstnevnte. Et senere bokstavpunkt trenger ikke bygge på svar på eller informasjon oppgitt i et tidligere.

Oppgave 1

(a) For $z > 0$, $t > 0$, vis det følgende *ved å antiderivere;* det er ingen score for å derivere høyresiden:

i) $\displaystyle\int \frac{1}{z \ln z}\, dz = \ln|\ln z| + C$

ii) $\displaystyle\int_1^t (\ln s)^2\, ds = 2(t-1) + t(\ln t)^2 - 2t\ln t$

(b) Finn den allmenne løsningen av differensialligningen $\dot{x} = \big(\ln t\big)^2 \cdot x \ln x$ (for $t > 0$, $x > 0$).

Oppgave 2 La $h(x, y)$ være definert for alle $x > 0$ og $y > 0$, slik at $h > 0$ overalt. Anta at h er homogen av grad k. Finn graden av homogenitet for funsjonen

$$H(x, y) = h\Big(\frac{h(x,x)}{h(y,y)}\,,\ \frac{h(y,y)}{h(x,x)}\Big)$$

Oppgave 3 I denne oppgaven er $a > 0$ en konstant, og $\quad f(x,y) = a^2xy - \frac{1}{3}ax^3 - \frac{1}{4}y^4.$

(a) f har to stasjonærpunkter. Finn og klassifiser dem.
(Klassifiseringen kan avhenge av a. Om verktøyene i kurset ikke kan klassifisere, vil «ingen konklusjon» være fullgodt svar.)

I resten av oppgaven setter du $a = 2$. Se på problemene

$$\text{minimer } f(x,y) \quad \text{når} \quad \frac{1}{2}x^2 - 2y = 0 \tag{L}$$

$$\text{maksimer } f(x,y) \quad \text{når} \quad \frac{1}{2}x^2 - 2y \leq 0 \tag{K}$$

(b) i) Sett opp Lagrange-betingelsene tilhørende problem (L).
ii) Sett opp Kuhn–Tucker-betingelsene tilhørede problem (K).

(c) i) Finn to punkter (x_1, y_1) og (x_2, y_2) som tilfredsstiller Lagrange-betingelsene tilhørende problem (L).
ii) Løser noen av disse punktene problem (L)?

(d) i) Avgjør hvorvidt (x_1, y_1) og/eller (x_2, y_2) tilfredsstiller Kuhn–Tucker-betingelsene tilhørende problem (K).
Hint: det kan være en god idé å sette inn $4y$ for x^2. *Om du ikke fant begge punktene i del (c):* Du kan få delscore om du forklarer (kort, men få med det viktige) hvordan finne svaret.
ii) Finn det eneste punktet (x_3, y_3) som tilfredsstiller Kuhn–Tucker-betingelsene tilhørende problem (K), men *ikke* Lagrange-betingelsene tilhørende problem (L).

Oppgave 4 Definer for hvert reelt tall t matrisene $\mathbf{A}_t$, $\mathbf{B}_t$ og $\mathbf{C}_t$ ved

$$\mathbf{A}_t = \begin{pmatrix} 4t+2 & t+1 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B}_t = \begin{pmatrix} 1 & -2t+2 & t-3 \\ 2 & 8t+4 & -4t-6 \\ -1 & -4t-2 & 5t+3 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{C}_t = \mathbf{A}_t\mathbf{B}_t.$$

(a) Det er slik at $\mathbf{C}_t = t\begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix}$ for passende konstanter p, q og r (dette skal du ikke vise).
i) Vis at $p = q = r \neq 0$. (Du trenger ikke regne ut de andre elementene av $\mathbf{C}_t$.)
ii) Bruk delspørsmål i) til å finne et uttrykk for $\mathbf{A}_t^{-1}$.

(b) Se på likningssystemet (der $\mathbf{x}$ er den ukjente) $\mathbf{A}_t\mathbf{x} = \begin{pmatrix} u & v & w \end{pmatrix}'$.
Finn de t, u, v, w som er slik at likningssystemet har *mer enn* én løsning
(Du er ikke bedt om å finne disse løsningene. Sett inn denne t-en og begynn å løse til du har funnet svaret på spørsmålet.)

ECON3120/4120 Mathematics 2

December 16th 2015, 1430–1730.

There are 2 pages of problems to be solved.

All printed and written material may be used, as well as pocket calculators.

Grades given run from A (best) to E for passes, and F for fail.

- You are required to state reasons for all your answers.
- You are permitted to use any information stated in an earlier letter-enumerated item (e.g. "(a)") to solve a later one (e.g. "(c)"), regardless of whether you managed to answer the former. A later item does not necessarily require answers from or information given in a previous one.

Problem 1

(a) For $z > 0$, $t > 0$, show the following *by antidiffererentiation;* there is no score fore differentiating the right-hand side:

i) $\displaystyle\int \frac{1}{z \ln z}\, dz = \ln|\ln z| + C$

ii) $\displaystyle\int_1^t (\ln s)^2\, ds = 2(t-1) + t(\ln t)^2 - 2t\ln t$

(b) Find the general solution of the differential equation $\dot{x} = \big(\ln t\big)^2 \cdot x \ln x$ (for $t > 0$, $x > 0$).

Problem 2 Let $h(x, y)$ be defined for all $x > 0$ and $y > 0$, such that $h > 0$ everywhere. Suppose h is homogeneous of degree k. Find the degree of homogeneity of the function

$$H(x, y) = h\Big(\frac{h(x,x)}{h(y,y)}\, , \, \frac{h(y,y)}{h(x,x)} \Big)$$

Problem 3 In this problem, $a > 0$ is a constant, and $f(x,y) = a^2xy - \frac{1}{3}ax^3 - \frac{1}{4}y^4$.

(a) f has two stationary points. Find and classify them..
(The classification may depend on a. If the tools of the course cannot classify, then «no conclusion» is a perfectly fine answer.)

Through the rest of the problem, let $a = 2$. Consider the problems

$$\text{minimize } f(x,y) \quad \text{subject to} \quad \frac{1}{2}x^2 - 2y = 0 \tag{L}$$

$$\text{maximize } f(x,y) \quad \text{subject to} \quad \frac{1}{2}x^2 - 2y \leq 0 \tag{K}$$

(b) i) State the Lagrange conditions associated to problem (L).

ii) State the Kuhn–Tucker conditions associated to problem (K).

(c) i) Find two points (x_1, y_1) and (x_2, y_2) that satisfy the Lagrange conditions associated to problem (L).

ii) Does any of these points solve problem (L)?

(d) i) Decide whether (x_1, y_1) and/or (x_2, y_2) satisfies/satisfy the Kuhn–Tucker conditions associated to problem (K).
Hint: it may be a good idea to insert $4y$ for x^2. *If you did not find both points in part (c):* You can obtain partial score from explaining (briefly, but catching everything essential) how to find the answer.

ii) Find the only point (x_3, y_3) which satisfies the Kuhn–Tucker conditions associated to problem (K), but *not* the Lagrange conditions associated to problem (L).

Problem 4 Define for each real number t the matrices $\mathbf{A}_t$, $\mathbf{B}_t$ and $\mathbf{C}_t$ by

$$\mathbf{A}_t = \begin{pmatrix} 4t+2 & t+1 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B}_t = \begin{pmatrix} 1 & -2t+2 & t-3 \\ 2 & 8t+4 & -4t-6 \\ -1 & -4t-2 & 5t+3 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{C}_t = \mathbf{A}_t\mathbf{B}_t.$$

(a) It is so that $\mathbf{C}_t = t\begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix}$ for suitable constants p, q and r (you are not supposed to show this).

i) Show that $p = q = r \neq 0$. (You are not asked to calculate other elements of $\mathbf{C}_t$.)

ii) Use item i) to find an expression for $\mathbf{A}_t^{-1}$.

(b) Consider the equation system (with $\mathbf{x}$ as the unknown) $\mathbf{A}_t\mathbf{x} = \begin{pmatrix} u & v & w \end{pmatrix}'$.
Find those t, u, v, w such that this equation system has *more than* one solution
(You are not asked to find those solutions.)