UNIVERSITETET I OSLO
ØKONOMISK INSTITUTT

Utsatt ksamen i: **ECON3120/4120 – Matematikk 2: Matematisk analyse og lineær algebra**
Postponed exam: ***ECON3120/4120 – Mathematics 2: Calculus and linear algebra***

Eksamensdag: Tirsdag 9. august 2016
Date of exam: Tuesday, August 9, 2016

Tid for eksamen: kl. 09.00 – 12.00
Time for exam: 9.00 a.m. – 12.00 noon

Oppgavesettet er på 5 sider (inkl. forsiden)
The problem set covers 5 pages (incl. cover sheet) ***English version on page 4***

Tillatte hjelpemidler:
- Alle skrevne og trykte hjelpemidler – samt kalkulator – er tillatt

Resources allowed:
- *All written and printed resources – as well as calculator - is allowed*

Eksamen blir vurdert etter ECTS-skalaen. A-F, der A er beste karakter og E er dårligste ståkarakter. F er ikke bestått.

The grades given: A-F, with A as the best and E as the weakest passing grade. F is fail.

ECON3120/4120 Matematikk 2

Utsatt prøve, 9. august 2016, 0900–1200.

Oppgavesettet er på 2 sider.

Alle trykte eller skrevne hjelpemidler samt lommeregnere er tillatt.

Karakterskalaen går fra A (beste karakter) til E for bestått, og F for ikke bestått.

- Alle svar skal begrunnes.
- Du kan benytte all informasjon oppgitt i et tidligere bokstavpunkt (f.eks. "(a)") til å løse et senere (f.eks. "(c)"), uansett om du klarte å besvare det førstnevnte. Et senere bokstavpunkt trenger ikke bygge på svar på eller informasjon oppgitt i et tidligere.

Oppgave 1 La $f(x, y) = e^{x^3y^2} - xy^2 - 1$.

(a) f har følgende egenskaper: (I): $f(x, y) = 0$ når $xy = 0$; (II): $f'_x(x, 0) = f'_y(x, 0) = 0$ for enhver x; (III): $f'_x(0, y) < 0$ for alle $y \neq 0$.

i) Bruk egenskapene (I)–(III) til å klassifisere stasjonærpunktet $(0, 0)$ *uten å* trekke inn andrederiverttesten

ii) Kan andrederiverttesten klassifisere stasjonærpunktet $(0, 0)$?

Fra nå av, la $t > 0$ være en konstant, og se på problemet

$$\max\ f(x, y) \qquad \text{når} \qquad (tx + 1)y \leq 1, \qquad x \geq 0 \qquad \text{og} \quad y \geq 0 \tag{P}$$

(b) i) Sett opp Kuhn–Tucker-betingelsene som hører til problemet (P).

ii) Vet vi allerede, uten ytterligere regning, at det vil være minst ett punkt som tilfredsstiller disse betingelsene?

(c) Se på de punktene som er slik at $x = 0$ og $0 < y < 1$. Hvilke(t) – om noen – av disse punktene vil tilfredsstille Kuhn–Tucker-betingelsene?

(d) Det kan vises – men du skal ikke gjøre det – at dersom Kuhn–Tucker-betingelsene holder med $x > 0$ og $(tx + 1)y = 1$, så er

$$x^2 e^{x^3/(tx+1)^2} = \frac{tx + 3}{tx + 2}$$

Vis at det finnes en positiv x som tilfredsstiller denne ligningen.

Oppgave 2 La r, s, t, u, v være reelle konstanter med $s > 0, t > 0, u > 0$. Definer matrisene

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{and} \qquad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s \end{pmatrix}$$

og la $\mathbf{I}$ være identitetsmatrisen og $\mathbf{0}$ nullmatrisen av orden 5×5.

(a) Regn ut $\mathbf{U}^2$ og $(r\mathbf{L} + \mathbf{D} + u\mathbf{U})\mathbf{U}$.

(b) Hvilke(n) av determinantene $|\mathbf{L}|$, $|\mathbf{L}' + \mathbf{L}|$, $|\mathbf{D}|$ og $|(2\mathbf{DULL}')^4(\mathbf{I} + \mathbf{L}' + \mathbf{U})^{2016}|$ er null? (Primtegnet ($'$) betyr transponering; husk at s, t og u alle er > 0.)

(c) i) Vis at $r\mathbf{L} + \mathbf{D} + u\mathbf{U}$ har en invers for alle strengt positive verdier av s, t og u, og alle verdier av r.

ii) Finn $(\mathbf{D} + u\mathbf{U})^{-1}$ når $s = t = 1$ og $u > 0$.
(Dette er inversen fra forrige spørsmål, når $r = 0$. Den avhenger av u.)

Oppgave 3

(a) i) La q være en konstant. Vis at

$$\int ((q-2)t^2 + 2t - 1)\frac{q^3}{e^{qt}}\, dt = C - \Big(q^2(q-2)t^2 + 4q(q-1)t - (q-2)^2\Big) \cdot e^{-qt}$$

ii) For hvilke(n) verdi(er) – om noen – av q er det følgende sant? (Husk at q ikke nødvendigvis er positiv!)

$$\int_t^\infty ((q-2)s^2 + 2s - 1)\frac{q^3}{e^{qs}}\, ds = \Big(q^2(q-2)t^2 + 4q(q-1)t - (q-2)^2\Big) \cdot e^{-qt}$$

(b) Finn den allmenne løsningen av differensialligningen

$$\dot{x}(t) = x(t) + (1-2t)e^{-t}$$

(*Hint:* Bruk del (a) med $q = 2$.)

Oppgave 4 La en homogen funksjon $h = h(x,y) > 0$ definert for $x > 0$ og $y > 0$, tilfredsstille $\quad x^2 h''_{xx}(x,y) + 2xy h''_{xy}(x,y) + y^2 h''_{yy}(x,y) = 0 \quad$ overalt.
Hva er de(n) mulige graden(e) av homogenitet?

University of Oslo / Department of Economics **English version**

ECON3120/4120 Mathematics 2

Postponed exam, August 9th 2016, 0900–1200.

There are 2 pages of problems to be solved.

All printed and written material may be used, as well as pocket calculators.

Grades given run from A (best) to E for passes, and F for fail.

- You are required to state reasons for all your answers.
- You are permitted to use any information stated in an earlier letter-enumerated item (e.g. "(a)") to solve a later one (e.g. "(c)"), regardless of whether you managed to answer the former. A later item does not necessarily require answers from or information given in a previous one.

Problem 1 Let $f(x,y) = e^{x^3y^2} - xy^2 - 1$.

(a) f has the following properties: (I): $f(x,y) = 0$ when $xy = 0$; (II): $f'_x(x,0) = f'_y(x,0) = 0$ for every x; (III): $f'_x(0,y) < 0$ for all $y \neq 0$.

i) Use the properties (I)–(III) to classify the stationary point $(0,0)$ *without* invoking the second-derivative test

ii) Can the second-derivative test classify the stationary point $(0,0)$?

Let from now on $t > 0$ be a constant, and consider the problem

$$\max\ f(x,y) \qquad \text{subject to} \qquad (tx+1)y \leq 1, \qquad x \geq 0 \qquad \text{and} \quad y \geq 0 \qquad \text{(P)}$$

(b) i) State the Kuhn–Tucker conditions associated with problem (P).

ii) Do we know already, without further calculations, that there will be at least one point which satisfies these conditions?

(c) Consider the points such that $x = 0$ and $0 < y < 1$. Which of these points – if any – will satisfy the Kuhn–Tucker conditions?

(d) It can be shown – but you are not asked to do so – that if the Kuhn–Tucker conditions hold with $x > 0$ and $(tx+1)y = 1$, then

$$x^2 e^{x^3/(tx+1)^2} = \frac{tx+3}{tx+2}$$

Show that there exists a positive x satisfying this equation.

Problem 2 Let r, s, t, u, v be real constants with $s > 0, t > 0, u > 0$. Define the matrices

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{and} \qquad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s \end{pmatrix}$$

and denote by $\mathbf{I}$ the identity matrix and by $\mathbf{0}$ the null matrix of order 5×5.

(a) Calculate $\mathbf{U}^2$ and $(r\mathbf{L} + \mathbf{D} + u\mathbf{U})\mathbf{U}$.

(b) Which of the determinants $|\mathbf{L}|$, $|\mathbf{L}' + \mathbf{L}|$, $|\mathbf{D}|$ and $|(2\mathbf{DULL}')^4(\mathbf{I} + \mathbf{L}' + \mathbf{U})^{2016}|$ will be zero? (The prime ($'$) denotes transpose; recall that s, t and u are all > 0.)

(c) i) Show that $r\mathbf{L} + \mathbf{D} + u\mathbf{U}$ has an inverse for all strictly positive values of s, t and u, and all values of r.

ii) Find $(\mathbf{D} + u\mathbf{U})^{-1}$ when $s = t = 1$ and $u > 0$.
(This is the inverse from the previous question, when $r = 0$. It depends on u.)

Problem 3

(a) i) Let q be a constant. Show that

$$\int ((q-2)t^2 + 2t - 1)\frac{q^3}{e^{qt}}\, dt = C - \left(q^2(q-2)t^2 + 4q(q-1)t - (q-2)^2\right) \cdot e^{-qt}$$

ii) For which value(s) – if any – of q does the following hold true? (Remember that q is not necessarily positive!)

$$\int_t^\infty ((q-2)s^2 + 2s - 1)\frac{q^3}{e^{qs}}\, ds = \left(q^2(q-2)t^2 + 4q(q-1)t - (q-2)^2\right) \cdot e^{-qt}$$

(b) Find the general solution of the differential equation

$$\dot{x}(t) = x(t) + (1 - 2t)e^{-t}$$

(*Hint:* Use part (a) with $q = 2$.)

Problem 4 Let a homogeneous function $h = h(x, y) > 0$ defined for $x > 0$ and $y > 0$, satisfy $x^2 h''_{xx}(x, y) + 2xy h''_{xy}(x, y) + y^2 h''_{yy}(x, y) = 0$ everywhere.
What is/are the possible degree(s) of homogeneity?