UNIVERSITETET I OSLO
ØKONOMISK INSTITUTT

Eksamen i: **ECON3120/4120 – Mathematics 2: Calculus and Linear Algebra**
Exam: ECON3120/4120 – Mathematics 2: Calculus and Linear Algebra

Eksamensdag: 1. desember 2017 **Sensur kunngjøres: 21. desember 2017**
Date of exam: December 1, 2017 ***Grades will be given: December 21, 2017***

Tid for eksamen: kl. 09.00 – 12.00
Time for exam: 9.00 a.m. – 12.00 noon

Oppgavesettet er på 5 sider (inkl. forsiden)
The problem set covers 5 pages (incl. cover sheet) ***English version on page 4***

Tillatte hjelpemidler:
- Åpen bok eksamen, der alle skrevne og trykte hjelpemidler – samt kalkulator – er tillatt

Resources allowed:
- *Open book exam, where all written and printed resources – as well as calculator - is allowed*

Eksamen blir vurdert etter ECTS-skalaen. A-F, der A er beste karakter og E er dårligste ståkarakter. F er ikke bestått.

The grades given: A-F, with A as the best and E as the weakest passing grade. F is fail.

Universitetet i Oslo / Økonomisk institutt **Bokmål (English version included)**

ECON3120/4120 Matematikk 2

1. desember 2017, 0900–1200.

Oppgavesettet er på 2 sider.

Alle trykte eller skrevne hjelpemidler samt lommeregnere er tillatt.

Karakterskalaen går fra A (beste karakter) til E for bestått, og F for ikke bestått.

- Alle svar skal begrunnes.
- Du kan benytte all informasjon oppgitt i et tidligere bokstavpunkt (f.eks. "(a)") til å løse et senere (f.eks. "(c)"), uansett om du klarte å besvare det førstnevnte. Et senere bokstavpunkt trenger ikke bygge på svar på eller informasjon oppgitt i et tidligere.

Oppgave 1 *(Forventet vekt: 40 prosent.)*

La $R > 1$. Definer funksjonene

$$h(t) = t^{1-R} - e^{et} \quad \text{for } t > 0 \qquad \text{og} \qquad g(t) = (t - t^R e^{et})e^{-\pi t} \quad \text{for } t \geq 0$$

der π og e er de velkjente konstantene $\pi = 3.14159\ldots$ og $e = 2.71828\ldots$. Merk at $h(t) = g(t)t^{-R}e^{\pi t}$ overalt hvor h er definert.

(a) Finn $\lim\limits_{t\to+\infty} h(t)$ og $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t)$.

(b) Vis at ligningen $h(t) = 0$ har én og bare én løsning $z > 0$.
(*Hint:* hva er $\lim_{t\to 0^+} h(t)$? Merk at du *ikke* er bedt om å *regne ut* z!)

(c) Vis at g har et globalt *maksimum* T slik at $T \in (0, z)$. (*Hint:* vis først $T \in [0, z]$.)

(d)
- Maksiumsverdien $g(T)$ avhenger av R, kall den $V(R)$. Finn et uttrykk for $\dfrac{dV}{dR}$.
- z (fra del (b)) avhenger også av R. Finn et uttrykk for $\dfrac{dz}{dR}$.

(e) Arealet $A = \displaystyle\int_T^z g(t)\,dt$ avhenger av R. Vis at

$$\frac{dA}{dR} = -V(R)\frac{dT}{dR} - \int_T^z t^R e^{-(\pi-e)t} \ln t \, dt$$

Du er *ikke* bedt om å regne ut verken integralet (ikke forsøk!) eller $\frac{dT}{dR}$.

Oppgave 2 *(Forventet vekt: 20 prosent.)*

(a) Vis det følgende *ved å antiderivere.* (Det er obligatorisk å integrere $te^{-\pi t} - t^2 e^{-(\pi - e)t}$; det er ingen score for å derivere høyresiden.)

$$\int \Big(te^{-\pi t} - t^2 e^{-(\pi-e)t}\Big)\, dt = \Big(\frac{t^2}{\pi - e} + \frac{2t}{(\pi - e)^2} + \frac{2}{(\pi - e)^3}\Big)e^{-(\pi-e)t} - \frac{1+\pi t}{\pi^2} e^{-\pi t} + C$$

(b) Se på differensialligningen

$$\dot{x} = \pi x + t - t^2 e^{et}$$

Finn den partikulære løsningen som tilfredsstiller $x(0) = 0$.

Oppgave 3 *(Forventet vekt: 20 prosent.)*

Definer for alle reelle s og t matrisene $\mathbf{A}_t$ og $\mathbf{B}_{s,t}$ ved

$$\mathbf{A}_t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & t \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad \mathbf{B}_{s,t} = \begin{pmatrix} 3s & 4s & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2s & 3s & -t \end{pmatrix}$$

(a)
- Regn ut $4s\mathbf{A}_t + t\mathbf{I} - \mathbf{B}_{s,t}$, der $\mathbf{I}$ er identitetsmatrisen av orden 3×3.
- Regn ut determinanten til $\mathbf{B}_{s,t}$.

(b)
- Regn ut den inverse til $\mathbf{A}_t$ eller vis at ingen invers eksisterer.
- Anta at $\mathbf{X}_{s,t}$ og $\mathbf{Y}_{s,t}$ er 3×3-matriser slik at $\mathbf{A}_t\mathbf{X}_{s,t} = \mathbf{B}_{s,t}^{2017}$ og $\mathbf{A}_t\mathbf{Y}_{s,t} = \mathbf{B}_{s,t}^{2017}$. Er det da slik at $\mathbf{X}_{s,t}$ må være lik $\mathbf{Y}_{s,t}$? Hvorfor (ikke)?
(Toppskriften står for 2017de potens.)

Oppgave 4 *(Forventet vekt: 20 prosent.)*

Definer $\quad F(x, y) = 4(x + 2)^{1/4} y^{1/4} \quad$ og se på problemet

$$\text{maksimer } F(x, y) \qquad \text{når} \qquad (x, y) \in S$$

der S er mengden av punkter (x, y) slik at $\quad x^2 + y^2 \le 4 \quad$ og $\quad y \le -mx$.

(a) Sett opp de tilhørende Kuhn–Tucker-betingelsene, for hver $m > 0$.

(b) La i denne delen $m = 1$. Ta for gitt at punktet $(x^*, y^*) = (-1, 1)$ er optimalt.
Hvor mye, tilnærmet, ville den optimale verdien av F endre seg om den første bibetingelsen ble erstattet av $x^2 + y^2 \le 4.1$?
(*Hint:* Hvor i S er $(-1, 1)$?)

University of Oslo / Department of Economics **English version**

ECON3120/4120 Mathematics 2

December 1st 2017, 0900–1200.

There are 2 pages of problems to be solved.

All printed and written material may be used, as well as pocket calculators.

Grades given run from A (best) to E for passes, and F for fail.

- You are required to state reasons for all your answers.
- You are permitted to use any information stated in an earlier letter-enumerated item (e.g. "(a)") to solve a later one (e.g. "(c)"), regardless of whether you managed to answer the former. A later item does not necessarily require answers from or information given in a previous one.

Problem 1 ***(Expected weight: 40 percent.)***

Let $R > 1$. Define the functions

$$h(t) = t^{1-R} - e^{et} \quad \text{for } t > 0 \qquad \text{and} \qquad g(t) = (t - t^R e^{et})e^{-\pi t} \quad \text{for } t \geq 0$$

where π and e are the well-known constants $\pi = 3.14159\ldots$ and $e = 2.71828\ldots$. Note that $h(t) = g(t)t^{-R}e^{\pi t}$ wherever h is defined.

(a) Find $\lim_{t\to+\infty} h(t)$ and $\lim_{t\to+\infty} g(t)$.

(b) Show that the equation $h(t) = 0$ has one and only one solution $z > 0$.
(*Hint:* what is $\lim_{t\to 0^+} h(t)$? Note that you are *not* asked to *calculate* z!)

(c) Show that g has a global *maximum* T such that $T \in (0, z)$. (*Hint:* show first: $T \in [0, z]$.)

(d)
- The maximum value $g(T)$ depends on R, call it $V(R)$. Find an expression for $\dfrac{dV}{dR}$.
- z (from part (b)) also depends on R. Find an expression for $\dfrac{dz}{dR}$.

(e) The area $A = \displaystyle\int_T^z g(t)\,dt$ depends on R. Show that

$$\frac{dA}{dR} = -V(R)\frac{dT}{dR} - \int_T^z t^R e^{-(\pi-e)t} \ln t\,dt$$

You are *not* asked to calculate neither the integral (do not try!) nor $\frac{dT}{dR}$.

Problem 2 *(Expected weight: 20 percent.)*

(a) Show the following *by antidifferentiation.* (It is mandatory to integrate $te^{-\pi t} - t^2 e^{-(\pi-e)t}$; there is no score for differentiating the right-hand side.)

$$\int \left(te^{-\pi t} - t^2 e^{-(\pi-e)t}\right) dt = \left(\frac{t^2}{\pi - e} + \frac{2t}{(\pi-e)^2} + \frac{2}{(\pi-e)^3}\right)e^{-(\pi-e)t} - \frac{1+\pi t}{\pi^2}e^{-\pi t} + C$$

(b) Consider the differential equation

$$\dot{x} = \pi x + t - t^2 e^{et}$$

Find the particular solution which satisfies $x(0) = 0$.

Problem 3 *(Expected weight: 20 percent.)*
Define for all real s and t the matrices $\mathbf{A}_t$ and $\mathbf{B}_{s,t}$ by

$$\mathbf{A}_t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & t \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{and} \qquad \mathbf{B}_{s,t} = \begin{pmatrix} 3s & 4s & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2s & 3s & -t \end{pmatrix}$$

(a)
- Calculate $4s\mathbf{A}_t + t\mathbf{I} - \mathbf{B}_{s,t}$, where $\mathbf{I}$ is the identity matrix of order 3×3.
- Calculate the determinant of $\mathbf{B}_{s,t}$.

(b)
- Calculate the inverse of $\mathbf{A}_t$ or show that it does not exist.
- Suppose that $\mathbf{X}_{s,t}$ and $\mathbf{Y}_{s,t}$ are 3×3 matrices such that $\mathbf{A}_t\mathbf{X}_{s,t} = \mathbf{B}_{s,t}^{2017}$ and $\mathbf{A}_t\mathbf{Y}_{s,t} = \mathbf{B}_{s,t}^{2017}$. Is it then so that $\mathbf{X}_{s,t}$ must equal $\mathbf{Y}_{s,t}$? Why (not)?
  (The superscript denotes 2017th power.)

Problem 4 *(Expected weight: 20 percent.)*
Define $F(x,y) = 4(x+2)^{1/4}y^{1/4}$ and consider the problem

$$\text{maximize } F(x,y) \qquad \text{subject to} \qquad (x,y) \in S$$

where S is the set of points (x,y) such that $x^2 + y^2 \leq 4$ and $y \leq -mx$.

(a) State the associated Kuhn–Tucker conditions, for each $m > 0$.

(b) Let in this part $m = 1$. Take for granted that the point $(x^*, y^*) = (-1, 1)$ is optimal. How much, approximately, would the optimal value of F change if the first constraint were replaced by $x^2 + y^2 \leq 4.1$?
(*Hint:* Where in S is $(-1,1)$?)