UNIVERSITETET I OSLO
ØKONOMISK INSTITUTT

Eksamen i: ECON3120/4120 – Mathematics 2: Calculus and Linear Algebra
Exam: ECON3120/4120 – Mathematics 2: Calculus and Linear Algebra

Eksamensdag: Fredag 30. november 2018
Date of exam: Friday, November 30, 2018

Sensur kunngjøres: 19. desember 2018
Grades are given: December 19, 2018

Tid for eksamen: kl. 14.30 – 17.30
Time for exam: 2.30 p.m. – 5.30 p.m.

Oppgavesettet er på 5 sider (inkl. forsiden)
The problem set covers 5 pages

Engelsk versjon s. 4
English version on page 4

Tillatte hjelpemidler:

- Åpen bok eksamen, der alle trykte og skrevne hjelpemidler, i tillegg til to alternative kalkulatorer, er tillatt. Se nedenfor.
- *Open book examination, where all written and printed resources, in addition to two alternative calculators, are allowed. Calculators allowed for examination:*

- **Aurora HC106**
- **Casio FX-85EX**

Eksamen blir vurdert etter ECTS-skalaen. A-F, der A er beste karakter og E er dårligste ståkarakter. F er ikke bestått.

The grades given: A-F, with A as the best and E as the weakest passing grade. F is fail.

Universitetet i Oslo / Økonomisk institutt **Bokmål (English version included)**

ECON3120/4120 Matematikk 2

30. november 2018, 1430–1730.

Oppgavesettet er på 2 sider.

Alle trykte eller skrevne hjelpemidler samt begge de godkjente kalkulatorene er tillatt.

Karakterskalaen går fra A (beste karakter) til E for bestått, og F for ikke bestått.

- Alle svar skal begrunnes.
- Du kan benytte all informasjon oppgitt i et tidligere bokstavpunkt (f.eks. «(a)» eller «ii)») til å løse et senere (f.eks. «(c)» eller «iv)»), uansett om du klarte å besvare det førstnevnte. Et senere bokstavpunkt trenger ikke bygge på svar på eller informasjon oppgitt i et tidligere.

Oppgave 1 La a, b, r være konstanter, alle tre $\in (0, 1/2)$. Ligningssystemet

$$\begin{aligned} (aL^a + bL^b)\sqrt{K} &= wLe^{rt} \\ L^a + L^b &= \sqrt{K}e^{rt} \end{aligned} \tag{S}$$

definerer kontinuerlig deriverbare funksjoner $K = K(t, w)$ og $L = L(t, w)$ rundt det punktet der $(K, L, t, w) = (4, 1, 0, 2(a + b))$. (Dette skal du ikke vise.)

(a) Differensier systemet (dvs., regn ut differensialer).

(b) Anta at t øker fra 0 til 1 og at w øker fra $2(a + b)$ til $2(a + b) + h$. Bruk det differensierte systemet fra del (a) til å approksimere endringen i L. (Du skal bruke det differensierte systemet. Du kan ikke forvente uttelling for å eliminere $\sqrt{K}$ fra (S).)

Oppgave 2

(a) For hver konstant $k \neq 0$ (positiv eller negativ!), finn grensene

i): $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^k \ln x}$, ii): $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^k \ln x}$, og iii): $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^k (\ln x)^{2018}}$.

(b) Vis det følgende *ved å antiderivere* (der er ingen score for å derivere høyresidene):

i): $$\int_x^1 \frac{1}{u \cdot (1 - \ln u)}\, du = \ln\big(1 - \ln x\big) \qquad (\text{for } 0 < x < e)$$

ii): $$\tfrac{1}{2} \int e^v \cdot \ln((1 + e^v)^2)\, dv = (1 + e^v)(\ln(1 + e^v) - 1) + C.$$

(c) Finn den generelle løsningen av differensialligningen (som gjelder for $x \in (0, e)$):

$$\dot{x} = x \cdot (1 - \ln x) \cdot e^t \cdot \ln((1 + e^t)^2))$$

Oppgave 3 La t være en reell konstant. La $\mathbf{I}$ være 4×4-identitetsmatrisen, og la

$$\mathbf{A}_t = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -t & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad \mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Transponering av matriser noteres med primtegn.

(a) Regn ut hver av de følgende, eller forklar hvorfor den ikke eksisterer:
i): $\mathbf{A}_t^2$ ii): determinanten $|\mathbf{A}_t'\mathbf{A}_t|$ iii): $\mathbf{I1}(\mathbf{I1})'$ iv): $(\mathbf{A}_t\mathbf{1})'\mathbf{A}_t\mathbf{1}$.
(*Hint:* svarene bør ikke motsi del (b).)

(b) Bruk del (a) til å vise at så lenge den inverse matrisen $\mathbf{A}_t^{-1}$ eksisterer, så er den på formen $s\mathbf{A}_t$ for et eller annet reelt tall s.

(c) Løs ligningssystemet $\mathbf{A}_t\mathbf{x} = \mathbf{1}$ når t er slik at det finnes nøyaktig én løsning $\mathbf{x}$.

Vi minner om at dersom $\mathbf{M}$ er en inverterbar $n\times n$-matrise, der $n > 1$, så er $\mathbf{M}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{M}|}\mathbf{C}'$ der $\mathbf{C}$ har elementene c_{ij} = kofaktoren til element (i,j) av $\mathbf{M}$.

(d) Hvis $|\mathbf{M}| = d$ ($\neq 0$), hva er da determinanten til $\mathbf{C}$?

Oppgave 4 La $c > 0$ være en konstant. La u være en kontinuerlig deriverbar funksjon av to variabler. Se på maksimeringsproblemet

$$\max\ u(x,y) \quad \text{under bibetingelsen} \qquad c - u(1-x, 1-y) = 0 \tag{L}$$

og det ikkelineære programmeringsproblemet

$$\max\ u(x,y) \quad \text{når} \qquad c - u(1-x,1-y) \leq 0, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad \text{og} \quad 0 \leq y \leq 1 \tag{K}$$

(Merk: «$0 \leq x \leq 1$» utgjør to bibetingelser $x \geq 0$ og $x \leq 1$, og tilsvarende for «$0 \leq y \leq 1$».)

(a) i): Sett opp Lagrange-betingelsene som hører til problem (L), og sett opp Kuhn–Tucker-betingelsene som hører til problem (K).
(Et mulig hint dersom «u» i bibetingelsen er forvirrende: skriv først som $c - g(x,y) = 0$ (hhv. ≤ 0), og sett inn etterpå, så du i svaret får betingelser med deriverte av u, ikke av «g».)

ii): Sant eller usant? *«Punktet $(x,y) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ vil tilfredsstille Lagrange-betingelsene tilhørende problem (L), såfremt bibetingelsen holder.»*
(Ikke forvent noen uttelling for en gjetning uten begrunnelse!)

(b) I denne delen lar du $u(x,y) = 2(e+x) - e^{2(1-x)} - (1+e)e^{1-2y}$ og $c = 0$.

i): Vis at punktet $(x,y) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ faktisk er optimalt for problem (K).
(Om du ikke kan gjøre (K), kan du få delscore for å vise optimalitet for (L) i stedet.)

ii): Hvis c reduseres fra 0 til -0.03, omtrent hvor mye vil den optimale verdien endres?
(Du kan ta optimaliteten i del i) for gitt uansett om du viste den. Dersom du valgte problem (L) i i), kan du se på (L) her også.)

ECON3120/4120 Mathematics 2

November 30th 2018, 1430–1730.

There are 2 pages of problems to be solved.

All printed and written material may be used, as well as both the approved calculators.

Grades given run from A (best) to E for passes, and F for fail.

- You are required to state reasons for all your answers.
- You are permitted to use any information stated in an earlier item (e.g. «(a)» or «ii)») to solve a later one (e.g. «(c)» or «iv)»), regardless of whether you managed to answer the former. A later item does not necessarily require answers from or information given in a previous one.

Problem 1 Let a, b, r be constants, all $\in (0, 1/2)$. The equation system

$$\begin{aligned} (aL^a + bL^b)\sqrt{K} &= wLe^{rt} \\ L^a + L^b &= \sqrt{K}e^{rt} \end{aligned} \tag{S}$$

defines continuously differentiable functions $K = K(t, w)$ and $L = L(t, w)$ around the point where $(K, L, t, w) = (4, 1, 0, 2(a + b))$. (You shall not show this.)

(a) Differentiate the system (i.e., calculate differentials).

(b) Suppose that t increases from 0 to 1, and w increases from $2(a + b)$ to $2(a + b) + h$. Use the differentiated system from part (a) to approximate the change in L. (You must use the differentiated system. You cannot expect score for eliminating $\sqrt{K}$ from (S).)

Problem 2

(a) For each constant $k \neq 0$ (positive or negative!), find the limits

i): $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^k \ln x}$, ii): $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x^k \ln x}$, and iii): $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^k (\ln x)^{2018}}$.

(b) Show the following *by antidifferentiation* (there is no score for differentiating the right-hand sides):

i): $$\int_x^1 \frac{1}{u \cdot (1 - \ln u)}\, du = \ln\big(1 - \ln x\big) \qquad \text{(for } 0 < x < e\text{)}$$

ii): $$\tfrac{1}{2} \int e^v \cdot \ln((1 + e^v)^2)\, dv = (1 + e^v)(\ln(1 + e^v) - 1) + C.$$

(c) Find the general solution of the differential equation (valid for $x \in (0, e)$):

$$\dot{x} = x \cdot (1 - \ln x) \cdot e^t \cdot \ln((1 + e^t)^2))$$

Problem 3 Let t be a real constant. Let $\mathbf{I}$ be the 4×4 identity matrix, and put

$$\mathbf{A}_t = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -t & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{and} \qquad \mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Throughout the problem, the prime symbol denotes matrix transpose.

(a) Calculate each of the following or explain why it does not exist:
i): $\mathbf{A}_t^2$ ii): the determinant $|\mathbf{A}_t'\mathbf{A}_t|$ iii): $\mathbf{I1}(\mathbf{I1})'$ iv): $(\mathbf{A}_t\mathbf{1})'\mathbf{A}_t\mathbf{1}$.
(*Hint:* none of your answers should contradict part (b).)

(b) Use part (a) to show that whenever the inverse $\mathbf{A}_t^{-1}$ exists, it is of the form $s\mathbf{A}_t$ for some real number s.

(c) Solve the equation system $\mathbf{A}_t\mathbf{x} = \mathbf{1}$ when t is such that precisely one solution $\mathbf{x}$ exists.

Recall that if $\mathbf{M}$ is an invertible $n \times n$ matrix, where $n > 1$, then $\mathbf{M}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{M}|}\mathbf{C}'$ where $\mathbf{C}$ has elements c_{ij} = the cofactor of element (i, j) of $\mathbf{M}$.

(d) If $|\mathbf{M}| = d$ $(\neq 0)$, what is then the determinant of $\mathbf{C}$?

Problem 4 Let $c > 0$ be a constant. Let u be a continuously differentiable function of two variables. Consider the maximization problem

$$\max\ u(x, y) \quad \text{subject to the constraint} \qquad c - u(1-x, 1-y) = 0 \tag{L}$$

and the nonlinear programming problem

$$\max\ u(x, y) \quad \text{subject to} \qquad c - u(1-x, 1-y) \leq 0, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad \text{and} \quad 0 \leq y \leq 1 \tag{K}$$

(Note: «$0 \leq x \leq 1$» forms two constraints $x \geq 0$ and $x \leq 1$, and similar for «$0 \leq y \leq 1$».)

(a) i): State the Lagrange conditions associated with problem (L), and state the Kuhn–Tucker conditions associated with problem (K).
(Possible hint if the «u» in a constraint is confusing: write first as $c - g(x, y) = 0$ (resp. ≤ 0), and insert afterwards, so that you in the end get conditions with derivatives of only u, not of «g».)

ii): True or false? *«The point $(x, y) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ will satisfy the Lagrange conditions associated with problem (L), as long as the constraint holds.»*
(Do not expect score for an unsubstantiated guess!)

(b) Let in this part $u(x, y) = 2(e + x) - e^{2(1-x)} - (1 + e)e^{1-2y}$ and $c = 0$.

i): Show that the point $(x, y) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ is indeed optimal for problem (K).
(If unable to do (K), then for partial score: show optimality for (L) instead.)

ii): If c is decreased from 0 to -0.03, approximately how much does the optimal value change? (You can take the optimality from part i) for granted regardless of whether you managed to show it. If you did problem (L) in i), you can consider (L) here too.)