Department of Economics
May 2004
Arne Strøm

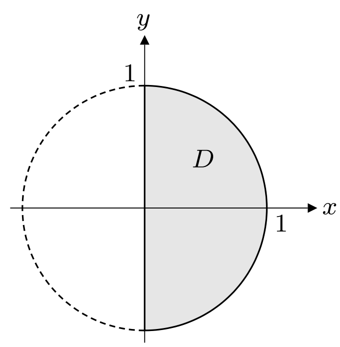
ECON3120/4120 Mathematics 2, spring 2004
Problem solutions for the "seminar" on 5 May 2004

(For practical reasons (read laziness), most of the solutions this time are in Norwegian. Please ask if you have difficulty understanding the text.)

Old exam problems

Exam problem 2

(a) Se figuren.



(b) Derivasjon gir

$$g_1'(x,y) = 3x^2 - 2x = 3x(x - \tfrac{2}{3}), \qquad g_2'(x,y) = -2y,$$
$$g_{11}''(x,y) = 6x - 2, \qquad g_{12}''(x,y) = 0, \qquad g_{22}''(x,y) = -2.$$

Det er lett å se at g har to stasjonære punkter, nemlig $(x_1, y_1) = (0,0)$ og $(x_2, y_2) = (\frac{2}{3}, 0)$. For å klassifisere de stasjonære punktene regner vi ut $A = f_{11}''(x,y)$, $B = f_{12}''(x,y)$ og $C = f_{22}''(x,y)$ i hvert av punktene, og bruker annenderiverttesten. Vi finner

(x,y)	A	B	C	$AC - B^2$	Type stasjonært punkt
$(0,0)$	-2	0	-2	4	Lokalt maksimumspunkt
$(\frac{2}{3}, 0)$	2	0	-2	-4	Sadelpunkt

(c) Ekstremverdisetningen sikrer at g har globale ekstrempunkter over mengden D. Det eneste stasjonære punktet i det indre av D er $(\frac{2}{3}, 0)$, som er et sadelpunkt. Ekstrempunktene for g må derfor ligge på randen av D. Randen består av

(i) punktene på det rette linjestykket fra $(0,-1)$ til $(0,1)$, og

(ii) punktene på halvsirkelen gitt ved $x^2 + y^2 = 1$ og $x \geq 0$.

v04ste12 5.5.2004 1283

Langs det rette linjestykket er $x = 0$, så $g(x, y) = g(0, y) = 3 - y^2$, som får sin største verdi for $y = 0$ og sin minste verdi for $y = \pm 1$. Mulige ekstrempunkter på denne delen av randen er altså $(0, 0)$, $(0, 1)$ og $(0, -1)$.

Langs halvsirkelen er $x^2 + y^2 = 1$, så $g(x, y) = 3 + x^3 - 1 = 2 + x^3$. Dette uttrykket får sin største verdi for $x = 1$ og sin minste verdi for $x = 0$. Mulige ekstrempunkter på halvsirkelen er altså $(0, 1)$, $(0, -1)$ og $(1, 0)$.

Alt i alt har vi altså fire punkter som kan tenkes å være ekstrempunkter for g, nemlig

$$(0, 0), \quad (0, 1), \quad (0, -1) \quad \text{og} \quad (1, 0).$$

Innsetting gir

$$g(0, 0) = 3, \quad g(0, 1) = 2, \quad g(0, -1) = 2 \quad \text{og} \quad g(1, 0) = 3.$$

Altså er punktene $(0, 0)$ og $(1, 0)$ globale maksimumspunkter, og punktene $(0, 1)$ og $(0, -1)$ er globale minimumspunkter. Maksimumsverdien er $g_{\text{maks}} = 3$, og minimumsverdien er $g_{\text{min}} = 2$.

Exam problem 7

The profit function is

$$N(x, y) = px + qy - \pi(x, y) = ax - 2x^3 + by^{1/2} - cx - dy - e,$$

defined over the set $D = \{(x, y) : x > 0,\ y > 0\}$.

(a) The first- and second-order partial derivatives of N are

$$\begin{aligned} &N_1'(x, y) = a - 6x^2 - c, \quad N_2'(x, y) = \tfrac{1}{2}by^{-1/2} - d, \\ &N_{11}''(x, y) = -12x, \quad N_{12}''(x, y) = 0, \quad N_{22}'' = -1/4by^{-3/2}. \end{aligned}$$

The stationary points are the solution of the equation system

$$\begin{aligned} a - 6x^2 - c = 0 &\iff 6x^2 = a - c, \\ \tfrac{1}{2}by^{-1/2} - d = 0 &\iff b = 2dy^{1/2}. \end{aligned}$$

Note that for this system to have solutions in D, we must assume $a > c$.

The only stationary point of N in D is then

$$(x_0, y_0) = \big(\sqrt{(a - c)/6},\, b^2/(4d^2)\big).$$

It is clear that

$$N_{11}''(x, y) < 0, \quad N_{22}''(x, y) < 0, \quad \text{and} \quad N_{11}''(x, y)N_{22}''(x, y) - \big(N_{12}''(x, y)\big)^2 > 0$$

for all (x, y) in D. It follows from Theorem 13.1.2 in EMEA (Thm. 13.1.1 in MA I) that (x_0, y_0) is a (global) maximum point for N over D.

(b) The elasticity of $N(x,y)$ with respect to y is

$$\mathrm{El}_y\, N(x,y) = \frac{y}{N(x,y)} N_2'(x,y) = \frac{1}{N(x,y)}\big(\tfrac{1}{2} b y^{1/2} - dy\big).$$

At the maximum point, $N_2'(x,y) = 0$. Consequently, $\mathrm{El}_y\, N(x,y) = 0$ there.

Exam problem 9

(a) Differensierer vi ligningen, får vi

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{4\ln x}{x}\right) dx = \frac{1}{2K}\, dK + \frac{1}{3L}\, dL,$$

og siden $dx = \dfrac{\partial x}{\partial K}\, dK + \dfrac{\partial x}{\partial L}\, dL$, har vi

$$\frac{\partial x}{\partial K} = \frac{1}{\dfrac{1}{x} + \dfrac{4\ln x}{x}} \frac{1}{2K} = \frac{x}{2K(1+4\ln x)}$$

og tilsvarende

$$\frac{\partial x}{\partial L} = \frac{1}{\dfrac{1}{x} + \dfrac{4\ln x}{x}} \frac{1}{3L} = \frac{x}{3L(1+4\ln x)}\,.$$

Den "kryssderiverte" ("mixed second-order derivative") er

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 x}{\partial K \partial L} &= \frac{\partial}{\partial K}\left(\frac{\partial x}{\partial L}\right) = \frac{1}{3L}\frac{\partial x}{\partial K}\left(\frac{x}{1+4\ln x}\right) = \frac{1}{3L}\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{1+4\ln x}\right)\frac{\partial x}{\partial K} \\ &= \frac{1}{3L}\frac{(1+4\ln x) - x\cdot\frac{4}{x}}{(1+4\ln x)^2}\,\frac{x}{2K(1+4\ln x)} = \frac{4x\ln x - 3x}{6KL(1+4\ln x)^3}\,.\end{aligned}$$

(b) Definisjonen av elastisiteten gir

$$\mathrm{El}_K\, x = \frac{K}{x}\cdot\frac{\partial x}{\partial K} = \frac{1}{2(1+4\ln x)} \qquad \text{og} \qquad \mathrm{El}_L\, x = \frac{L}{x}\cdot\frac{\partial x}{\partial L} = \frac{1}{3(1+4\ln x)}\,,$$

så

$$\mathrm{El}_K\, x + \mathrm{El}_L\, x = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)\frac{1}{1+4\ln x} = \frac{5}{6(1+4\ln x)}\,.$$

Exam problem 39

(a) De stasjonære punktene (x,y) for f er løsningene av ligningene

(1) $$f_1'(x,y) = \frac{1}{x+y} - 2x + 1 = 0 \iff \frac{1}{x+y} = 2x - 1$$

(2) $$f_2'(x,y) = \frac{1}{x+y} - 2y \qquad = 0 \iff \frac{1}{x+y} = 2y$$

Vi ser at vi må ha $2y = 2x - 1$, altså

$$y = x - \tfrac{1}{2}\,. \tag{3}$$

Setter vi dette uttrykket for y inn i (1) eller (2), får vi ligningen

$$\frac{1}{2x - \frac{1}{2}} = 2x - 1.$$

Dette gir videre

$$1 = (2x - \tfrac{1}{2})(2x - 1) = 4x^2 - x - 2x + \tfrac{1}{2},$$

altså

$$4x^2 - 3x - \tfrac{1}{2} = 0.$$

Denne annengradsligningen har røttene

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 4(-\frac{1}{2})}}{8} = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{8}\,. \tag{4}$$

Definisjonsområdet for f er angitt som det området i xy-planet hvor x og y er positive, så det er bare fortegnet + som kan brukes i (4). Bruker vi så ligning (3) til å finne y, ser vi at det eneste stasjonære punktet for f er

$$(x_0, y_0) = \Big(\frac{3 + \sqrt{17}}{8}\,, \frac{\sqrt{17} - 1}{8}\Big).$$

(b) Det eneste stasjonære punktet for f er punktet (x_0, y_0) som vi fant i (a). Dette er derfor det eneste mulige ekstrempunktet for f. De annenderiverte av f er

$$\begin{aligned} f''_{11}(x, y) &= -\frac{1}{(x + y)^2} - 2 = f''_{22}(x, y), \\ f''_{12}(x, y) &= -\frac{1}{(x + y)^2}\,. \end{aligned}$$

Det gir

$$f''_{11} f''_{22} - (f''_{12})^2 = \cdots = \frac{4}{(x + y)^2} + 4 > 0$$

for alle (x, y) i definisjonsområdet til f. Siden vi dessuten har $f''_{11} < 0$ og $f''_{22} < 0$ overalt, følger det av setning 13.1.1 i MA I (Thm. 13.1.2 i EMEA) at (x_0, y_0) er et globalt maksimumspunkt for f.

Exam problem 46

(a) Vi får $\mathbf{A}-\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ t & t & t-1 \end{pmatrix}$. Utvikler vi determinanten etter første linje, får vi

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}-\mathbf{I}| &= 0 \cdot (\text{et eller annet}) + (-1)\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ t & t-1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ t & t \end{vmatrix} \\ &= 0 - (-t+1+t) + (-t+2t) = t-1. \end{aligned}$$

(b) Med $t = 1$ får vi

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ -x-y-z \\ x+y+z \end{pmatrix}.$$

Matriseligningen $\mathbf{A}\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0$ er ekvivalent med ligningssystemet

$$x+y+z = x \tag{1}$$
$$-x-y-z = y \tag{2}$$
$$x+y+z = z \tag{3}$$

Siden venstresidene i (1) og (3) er like, må også høyresidene være like, dvs. $z = x$. Sammenligner vi (1) og (2), ser vi også at $y = -x$. Med disse uttrykkene for y og z er alle de tre ligningene tilfredsstilt (enkel innsetting), så vi får $\mathbf{x}_0 = (x, -x, x)'$. Dette gir $\|\mathbf{x}_0\| = \sqrt{\mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{x}_0} = \sqrt{3x^2}$, og siden vi skal ha $\|\mathbf{x}_0\| = 1$, må vi ha $x = \pm\sqrt{1/3}$. De mulige løsningene er altså

$$\mathbf{x}_0 = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Siden $\mathbf{A}\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0$, får vi

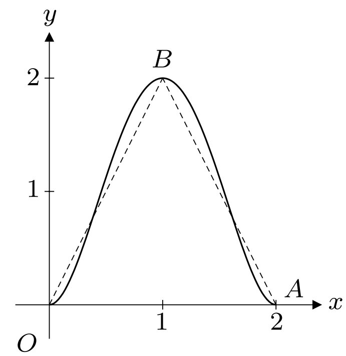
$$\begin{aligned} \mathbf{A}^2\mathbf{x}_0 &= \mathbf{A}(\mathbf{A}\mathbf{x}_0) = \mathbf{A}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0, \\ \mathbf{A}^3\mathbf{x}_0 &= \mathbf{A}(\mathbf{A}^2\mathbf{x}_0) = \mathbf{A}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0, \\ \mathbf{A}^4\mathbf{x}_0 &= \mathbf{A}(\mathbf{A}^3\mathbf{x}_0) = \mathbf{A}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0, \ \ldots \end{aligned}$$

Vi får altså $\mathbf{A}^n\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0$ for alle $n = 1, 2, \ldots$.

v04ste12 5.5.2004 1283

Exam problem 53

(a) $$\int_0^2 2x^2(2-x)^2\,dx = \int_0^2 (8x^2 - 8x^3 + 2x^4)\,dx$$
$$= \Big|_0^2 \Big(\frac{8}{3}x^3 - 2x^4 + \frac{2}{5}x^5\Big)$$
$$= \frac{8}{3}\cdot 8 - 2\cdot 16 + \frac{2}{5}\cdot 32$$
$$= \frac{32}{15} = 2\frac{2}{15}$$



We can see from the figure that the area between the graph and the x-axis over the interval $[0,2]$ must be approximately equal to the area of the triangle OAB, where the point O, A, and B are $(0, f(0)) = (0,0)$, $(2, f(2)) = (2,0)$, and $(1, f(1)) = (1,2)$, respectively. The area of this triangle is exactly 2.

(b) Here we shall *not* try to find the function x. (That would require knowledge of trigonometric and inverse trigonometric functions.) Instead we shall try to see if there is some other way to find the information we need in order to show that $t = 0$ is a minimum point for x. It turns out to be fairly easy in this case. In fact, $\dot{x}(t) < 0$ for $t < 0$ and $\dot{x}(t) > 0$ for $t > 0$. Hence, x is strictly decreasing in $(-\infty, 0]$ and strictly increasing in $[0, \infty)$, so $t = 0$ must be a global minimum point for $x = x(t)$. Note that this gives $x(t) \geq x(0) = 0$ for all t.

Furthermore,

$$\ddot{x} = \frac{d}{dt}\big((1+x^2)t\big) = 2x\dot{x}t + (1+x^2) = 2x(1+x^2)t^2 + (1+x^2).$$

Since $x(t) \geq 0$ for all t, we have $\ddot{x}(t) \geq 1 > 0$ for all t. It follows that x is (strictly) convex.

(c) Taking elasticities with respect to x gives

$$\begin{aligned} \mathrm{El}_x\, x^a + \mathrm{El}_x\, y^b &= \mathrm{El}_x\, A + \mathrm{El}_x\, e^{x/y^2}, \\ a + b\,\mathrm{El}_x\, y &= 0 + \mathrm{El}_u\, e^u\, \mathrm{El}_x\, u \qquad\qquad (\text{with } u = x/y^2) \\ &= u(\mathrm{El}_x\, x - \mathrm{El}_x\, y^2) \\ &= \frac{x}{y^2}(1 - 2\,\mathrm{El}_x\, y) \end{aligned}$$

and consequently,

$$\mathrm{El}_x\, y = \frac{x - ay^2}{2x + by^2}\,.$$

Eksamensoppgave 105

(a) Implisitt derivasjon mhp. x gir

$$2xy^3 + x^2 3y^2 y' + y' e^{-x} + (y+1)(-e^{-x}) = 1$$

v04ste12 5.5.2004 1283

Setter vi inn $x = 0$, $y = 1$, får vi

$$y' + 2(-1) = 1 \iff y' = 3.$$

Alternativt kan vi bruke formel (1) på side 424 i MA I (side 422 i EMEA), som gir

$$y' = -\frac{2xy^3 - (y+1)e^{-x} - 1}{3x^2y^2 + e^{-x}} = -\frac{-2-1}{1} = 3.$$

(b) Kurven skjærer x-aksen når $y = 0$, dvs. når

$$e^{-x} = x + 2 \tag{$\circ$}$$

Sett $\varphi(x) = e^{-x} - x - 2$. Da er $\varphi'(x) = -e^{-x} - 1 < 0$, for alle x, så $\varphi(x)$ er strengt avtakende. $\varphi(-1) = e - 1 > 0$, mens $\varphi(0) = -1$. Dermed har ligningen ($\circ$) en entydig bestemt løsning (som ligger i intervallet $(-1, 0)$). Dette viser at kurven gitt ved ($*$) i oppgaven skjærer x-aksen nøyaktig ett sted.

Problems from the textbook

MA I & EMEA, 13.2.2

(a)
$$f_1'(x,y) = 2x + 2y^2, \quad f_2'(x,y) = 4xy + 4y = 4(x+1)y$$
$$f_{11}''(x,y) = 2, \quad f_{12}'' = 4y, \quad f_{22}''(x,y) = 4x + 4.$$

(b) De stasjonære punktene er løsningene av ligningssystemet

$$2x + 2y^2 = 0 \tag{1}$$
$$4(x+1)y = 0 \tag{2}$$

Ligning (2) er ekvivalent med at $x = -1$ eller $y = 0$.

(i) Hvis $x = -1$, gir (1) at $y^2 = -x = 1$, så $y = \pm 1$.

(ii) Hvis $y = 0$, gir (1) at $x = -y^2 = 0$.

Vi får altså tre stasjonære punkter, nemlig

$$(-1, 1), \qquad (-1, -1), \qquad (0, 0).$$

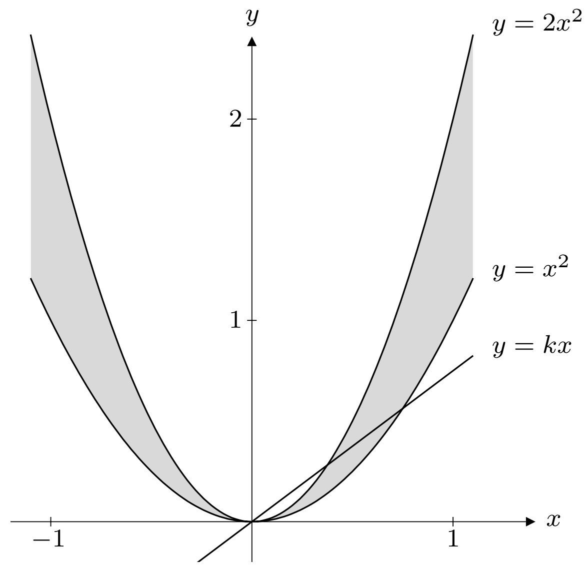
Annenderiverttesten gir

Punkt	A	B	C	$AC - B^2$	Resultat
$(-1, 1)$	2	4	0	-16	Sadelpunkt
$(-1, -1)$	2	-4	0	-16	Sadelpunkt
$(0, 0)$	2	0	4	8	Lokalt minimumspunkt

(a) De punktene hvor $f(x,y) = (y - x^2)(y - 2x^2)$ er negativ, er nettopp de punktene hvor de to faktorene er forskjellige fra 0 og har motsatte fortegn. Siden vi alltid må ha $y - 2x^2 \leq y - x^2$, ser vi at

$$f(x,y) < 0 \iff y - 2x^2 < 0 < y - x^2 \iff x^2 < y < 2x^2.$$

De aktuelle punktene ligger i det skyggelagte området på figuren.



Til oppgave 13.2.8

(b) De stasjonære punktene for $f(x,y) = 2x^4 - 3x^2y + y^2$ er de punktene hvor

$$f_1'(x,y) = 8x^3 - 6xy = 0 \tag{1}$$

$$f_2'(x,y) = -3x^2 + 2y = 0 \tag{2}$$

Ligning (2) gir $y = \frac{3}{2}x^2$, og setter vi dette inn i (1), får vi $8x^3 - 9x^3 = 0$, som gir $x = 0$, og dermed også $y = 0$. Det eneste stasjonære punktet for f er derfor $(0,0)$.

Vi har $f(0,0) = 0$, men av figuren ser vi at vi kan finne punkter så nær inntil $(0,0)$ vi vil med funksjonsverdi > 0 (i de hvite områdene) og punkter så nær inntil $(0,0)$ vi vil med funksjonsverdi < 0 (i de skyggelagte områdene). Det betyr at origo hverken er et lokalt maksimumspunkt eller et lokalt minimumspunkt for f. Altså er $(0,0)$ et sadelpunkt for f. (Det kan være verdt å merke seg at annenderiverttesten ikke kan hjelpe oss her, siden $f_{11}''(0,0)f_{22}''(0,0) - (f_{12}''(0,0))^2 = 0$.)

(c) Vi finner $g(t) = f(t,kt) = 2t^4 - 3kt^3 + k^2t^2 = t^2(2t^2 - 3kt + k^2)$, med $g'(t) = 8t^3 - 9kt^2 + 2k^2t = t(8t^2 - 9kt + 2k^2)$ og $g''(t) = 24t^2 - 18kt + 2k^2$. Spesielt er $g'(0) = 0$ og $g''(0) = 2k^2$, så hvis $k \neq 0$, ser vi med en gang at $t = 0$ er et lokalt minimumspunkt for g. I det spesielle tilfellet $k = 0$ er $g(t) = 2t^4$, som også har lokalt (og faktisk globalt) minimum i $t = 0$.

v04ste12 5.5.2004 1283

Ser vi på figuren, ser vi at uansett hvilken verdi vi velger for k, så vil det på begge sider av origo være i hvert fall være en liten bit av linjen $y = kx$ som ligger i den hvite (ikke skyggelagte) delen av planet. Går vi langs en rett linje ut fra origo, må vi altså i alle tilfeller gjennom et område med positive verdier for f før vi kan komme til et område med negative verdier.

MA I & EMEA, 13.4.2

(b) Den aktuelle mengden

$$S = \{\, (x, y) : x^2 + y^2 \le 1 \,\}$$

er mengden av alle punkter i xy-planet som ligger på eller innenfor en sirkel om origo med radius 1. Dette er en lukket og begrenset mengde, og funksjonen $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x$ er kontinuerlig, så ekstremverdisetningen sikrer at f oppnår både maksimum og minimum over S.

Et ekstrempunkt som ligger i det indre av S, må være et stasjonært punkt for f. Vi har

$$f'_x(x, y) = 2x - 1, \qquad f'_y(x, y) = 4y,$$

så det eneste stasjonære punktet for f er $(x_1, y_1) = (1/2, 0)$.

Et ekstrempunkt som ikke ligger i det indre av S, må ligge på randen av S, altså på sirkelen $x^2 + y^2 = 1$. *På denne sirkelen* har vi $y^2 = 1 - x^2$, og dermed

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x = x^2 + 2(1 - x^2) - x = 2 - x - x^2,$$

og x gjennomløper intervallet $[-1, 1]$.

Funksjonen $g(x) = 2 - x - x^2$ har ett stasjonært punkt i det indre av $[-1, 1]$, nemlig $x = -1/2$, så eventuelle ekstremverdier for $g(x)$ oppnås enten for denne verdien av x eller i ett av endepunktene ± 1 for intervallet $[-1, 1]$. Mulige ekstrempunkter for $f(x, y)$ på randen av S må derfor finnes blant punktene

$$(x_2, y_2) = \Big(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\Big), \quad (x_3, y_3) = \Big(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\Big),$$

$$(x_4, y_4) = (1, 0), \quad (x_5, y_5) = (-1, 0).$$

Regner vi ut verdien av $f(x, y)$ i de fem punktene vi har funnet, får vi

$$f\Big(\frac{1}{2}, 0\Big) = -\frac{1}{4}, \quad f\Big(-\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\Big) = \frac{9}{4}, \quad f(1, 0) = 0, \quad f(-1, 0) = 2.$$

Det følger at f oppnår sitt maksimum over S i de to punktene $(-\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\sqrt{3})$ og minimum i $(\frac{1}{2}, 0)$.

v04ste12 5.5.2004 1283