Løsning til PS10, problem 2

Vi har sammenhengen mellom konsumert kvantum X_t og pris P_t gitt ved

$$X_t = c + bP_t + e_t.$$

Har ikke data, men vet at $corr\left(X_t, P_t\right) = -0.856$, $\bar{X} = 617.2$, $sd\left(X\right) = 40.76$, $\bar{P} = 0.6103$, $sd\left(P\right) = 0.3765$. Dessuten har vi $T = 48$ observasjoner.

a)

Skal regne ut MKM-estimater for c og b. Først b. Tar vi standarduttrykket og multipliserer med 1/T-1 oppe og nede får vi

$$\hat{b} = \frac{cov\left(X, P\right)}{var\left(P\right)}$$

hvor cov og var er empirisk kovarians og varians. Vet at $cov\left(X, P\right) = corr\left(X, P\right) \cdot sd\left(X\right) \cdot sd\left(P\right)$ og $var\left(P\right) = sd\left(P\right)^2$. Da blir

$$\begin{aligned} \hat{b} &= \frac{corr\left(X, P\right) \cdot sd\left(X\right) \cdot sd\left(P\right)}{sd\left(P\right)^2} = \frac{sd\left(X\right)}{sd\left(P\right)} corr\left(X, P\right) \\ &= -0.856 \cdot \frac{40.76}{0.3765} = -92.671. \end{aligned}$$

Fra standarduttrykket for ĉ får vi

$$\begin{aligned} \hat{c} &= \bar{X} - \hat{b}\bar{P} \\ &= 617.2 - (-92.671) \cdot 0.6103 = 673.76. \end{aligned}$$

b)

R^2 anngir andelen av variasjonen i avhengig variabel som er forklart av den uavhengige. Vi bruker at med en forklaringsvariabel er R^2 lik korrelasjonen mellom X og P i andre, så

$$\begin{aligned} R^2 &= corr\left(X, P\right)^2 \\ &= \left(-0.856\right)^2 = 0.73274. \end{aligned}$$

For å beregne standardavviket til restleddet begynner vi med et estimat på variansen. Kall dette s^2. Vi har

$$s^2 = \frac{RSS}{T - k},$$

hvor RSS er "residual sum of squares" og k antall forklaringsvariabler. Dette er en forventningsrett estimator. Siden vi ikke kjenner RSS må vi regne den ut. Fra definisjonen av R^2 har vi

$$\begin{aligned} R^2 &= \frac{ESS}{TSS} = 1 - \frac{RSS}{TSS} \\ &\Rightarrow RSS = \left(1 - R^2\right) TSS \end{aligned}$$

Videre er

$$TSS = \sum \left(X_t - \bar{X}\right)^2 = \left(T - 1\right) sd\left(X\right)^2.$$

Setter inn:

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{\left(1-R^2\right)(T-1)\, sd\,(X)^2}{T-k} \\ &= \frac{(1-0.73)(48-1)\cdot 40.76^2}{48-1} = 448.57 \end{aligned}$$

som gir

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{448.57} = 21.179$$

som estimat på σ.

c)

Skal teste om b er signifikant forskjellig fra 0. Anta at $e_t \sim N\left(0, \sigma^2\right)$, at $cov\,(e_t, e_s) = 0$ for $t \neq s$, og at P_t er ikke-stokastisk. Null-hypotesen er $H_0:\ b = 0$ som vi tester mot $H_A:\ b \neq 0$. Under null-hypotesen er observatoren

$$G = \frac{\hat{b}}{se\left(\hat{b}\right)} \sim t\,(48-2)$$

hvor t-fordelinga kommer av at $se\left(\hat{b}\right)$ bruker den estimarte residualvariansen s^2. Velger 5% signifikansnivå. Da kan vi forkaste H_0 hvis $|T| > 2.009$ hvor jeg bruker 50 frihetsgrader.

Vet at

$$\begin{aligned} se\left(\hat{b}\right) &= \sqrt{\frac{s^2}{\sum_t \left(P_t - \bar{P}\right)^2}} = \sqrt{\frac{s^2}{(T-1)\, sd\,(P)^2}} \\ &= \sqrt{\frac{448.57}{(48-1)\cdot 0.3765^2}} = 8.205 \end{aligned}$$

som gir $G = -92.671/8.205 = -11.29$ og klar forkastning av H_0. Vi kan derfor med et 5% signifikansnivå forkaste at etterspørselene etter kaffe er uavhengig av prisen.

d)

Skal se på priselastisiteten, først for gjennomsnittsprisen $\bar{P}$ som gir gjennomsnittsetterspørsel $\bar{X}$. Har

$$\begin{aligned} El_P X &= \frac{\partial X}{\partial P}\frac{P}{X} = \hat{b}\frac{\bar{P}}{\bar{X}} \\ &= -92.671 \cdot \frac{0.6103}{617.2} = -0.0916. \end{aligned}$$

Pga dårlig vær øker prisen til 2.5. Vi får da

$$\begin{aligned} El_P X &= \hat{b}\frac{P}{\hat{c} + \hat{b}P} \\ &= -92.671 \cdot \frac{2.5}{673.76 - 92.671 \cdot 2.5} \\ & \quad -0.524\,, \end{aligned}$$

som er svært forskjellig fra den forrige elastisiteten. Det kommer av at vi har en lineær etterspørselkurve, så priselastisiteten ikke er konstant for ulike priser. Med de gitt parameterene vil elastisiteten være høyere (i absoluttverdi) jo høyere prisen er.