24. april 2002

Aanund Hylland:[#]

BESLUTNINGER UNDER USIKKERHET

Standard teori og kritikk av denne

1. Innledning

En (individuell) beslutning under usikkerhet kan beskrives på følgende måte:

– Beslutningstakeren må velge *en* av en gitt mengde mulige *handlinger*.
– Det er en gitt mengde potensielle *tilstander*, som representerer de forholdene det er usikkerhet om. Tilstandene er formulert slik at det er logisk nødvendig at en og bare en av dem inntreffer.

Når handlingen er valgt og det viser seg hvilken tilstand som inntreffer, er utfallet bestemt.

Dette kan framstilles i følgende skjema:

	Tilstand				
Handling	s_1	...	s_j	...	s_n
a_1	$U_{1,1}$		$U_{1,j}$		$U_{1,n}$
...					
a_i	$U_{i,1}$		$U_{i,j}$		$U_{i,n}$
...					
a_m	$U_{m,1}$		$U_{m,j}$		$U_{m,n}$

For enkelhets skyld er det her antatt at det er et endelig antall mulige handlinger, betegnet a_1, a_2, ..., a_i, ..., a_m, og et endelig antall potensielle tilstander, betegnet s_1, s_2, ..., s_j, ..., s_n. I praksis vil ofte både handling og tilstand inneholde kontinuerlige variabler, slik at det er uendelig mange muligheter.

Både handling, tilstand og utfall kan i prinsippet være svært kompliserte objekter, men det er det ikke nødvendig å gå inn på her.

#. Professor i samfunnsøkonomi og beslutningsteori ved Universitetet i Oslo. Adresse: Økonomisk institutt, postboks 1095, Blindern, 0317 OSLO. Kontortelefon: 22 85 42 71. Telefaks: 22 85 50 35. Elektronisk post: aanund.hylland@econ.uio.no. Privattelefon: 22 60 47 00.

Det er viktig at alt som har betydning for utfallet og som det er usikkerhet om, er lagt inn i tilstanden. Når handlingen (a_i) er valgt og tilstanden (s_j) er kjent, skal utfallet ($U_{i,j}$) følge mekanisk og med sikkerhet.

Beslutningstakeren er forutsatt å ha preferanser knyttet til utfallet og bare til utfallet. Dersom visse handlinger eller tilstander har (positiv eller negativ) verdi i seg selv, må dette være lagt inn i utfallet.

Enhver kombinasjon av handling og tilstand må være prinsipielt mulig, selv om noen kombinasjoner kan gi katastrofalt dårlige utfall. Når handlingen skal velges, er jo tilstanden ukjent, og det lar seg ikke forene med at noen kombinasjoner er umulige.

2. Grad av usikkerhet

Formuleringen i avsnitt 1 forutsetter at beslutningstakeren kjenner mengden av potensielle tilstander. Det hersker altså ikke total uvitenhet. Det er vanskelig å tenke seg at man kan utvikle noen teori for beslutninger under total uvitenhet.

To alternativer peker seg ut når det gjelder grad av usikkerhet:

(1) Beslutningstakeren kjenner mengden av potensielle tilstander, men vet absolutt ikke noe mer enn dette.

(2) Beslutningstakeren er i stand til å knytte en presis sannsynlighet til hver potensiell tilstand.

I begge tilfeller er det usikkerhet, men beslutningstakeren vet vesentlig mer i tilfelle (2) enn i tilfelle (1).[1]

Dette er slett ikke en utfyllende liste over mulige grader av usikkerhet. For det første kan man i prinsippet tenke seg total uvitenhet, dvs. mindre kunnskap enn forutsatt i (1), og full sikkerhet, dvs. mer kunnskap enn forutsatt i (2). Dessuten fins det en rekke tilfeller mellom (1) og (2). Det betyr at beslutningstakeren kjenner mengden av potensielle tilstander og er i stand til å si noe om hvilke av dem som er mest rimelige e.l., men uten å kunne uttrykke dette i presise sannsynligheter. Det kan formuleres mange varianter av tilfeller mellom (1) og (2), men dette blir ikke diskutert nærmere her.[2]

---

1. Noen forfattere omtaler tilfelle (1) som beslutninger under *usikkerhet* og tilfelle (2) som beslutninger under *risiko*, men den terminologien blir altså ikke brukt her.

2. Det kan hevdes at de aller fleste praktisk viktige tilfeller av beslutninger under usikkerhet ligger mellom (1) og (2). Det kan synes lite tilfredsstillende at man da ikke har noen god teori for slike tilfeller, men slik er det altså.

3. Bare mengden av tilstander er kjent

Tilfelle (1) fra avsnitt 2 blir vanligvis ikke studert i (standard) økonomisk teori, men innen andre fag, f.eks. filosofi, har man interessert seg for det. Her vil det bare bli kortfattet omtalt.

Det gir ikke mening å legge større vekt på de utfallene som tilhører *en* tilstand enn en annen. Dersom man f.eks. la større vekt på utfallet ved s_1 enn ved s_2, har man på en måte sagt at man regner s_1 som mer rimelig eller sannsynlig enn s_2, og slik kunnskap skal ifølge forutsetningene ikke finnes.

Derimot er det mulig å legge størst vekt på spesielt dårlige eller spesielt gode utfall.

Følgende beslutningsregel blir ofte anbefalt i dette tilfellet:

> For hver mulig handling – dvs. hver linje i tabellen i avsnitt 1 – finn det dårligste utfallet. Vurder handlingen som om dette utfallet vil inntre, og velg den handlingen som på dette grunnlaget er best.

Denne blir ofte kalt *maksimin-regelen*. Man maksimerer – over mengden av mulige handlinger – det minimale (dårligste) utfallet.[3] Regelen forutsetter at beslutningstakeren kan rangere utfallene, altså har ordinale preferanser over disse. Ytterligere krav til preferansene er det ikke nødvendig å stille.

På en måte bygger maksimin-regelen på en ekstremt pessimistisk oppfatning av verden. Det kan virke som om beslutningstakeren tenker på følgende måte:;

> «Uansett hvilken handling jeg velger, går verden meg imot og sørger for at utfallet blir så dårlig som mulig, gitt denne handlingen.»

Det er imidlertid mulig å gi en normativ begrunnelse for regelen uten å forutsette en slik tankegang. Det ville føre for langt å gå nærmere inn på dette.

Man kan også tenke seg en "maksimaks"-regel der hver handling blir vurdert på grunnlag av det *beste* utfallet den kan gi, men det er vanskeligere å begrunne en slik regel normativt.

4. Tilstandene har kjente sannsynligheter

Når det er endelig mange potensielle tilstander, som forutsatt i avsnitt 1, vil dette si at det fins tall $p_1, p_2, ..., p_j, ..., p_n$, der $p_j \geq 0$ for alle j og $p_1 + p_2 + ... + p_j + ... + p_n = 1$, slik at p_j er sannsynligheten for at s_j inntrer.[4] Tilfellet med uendelig mange tilstander blir ikke diskutert.

---

3. Denne formuleringen lar seg forhåpentligvis ikke misforstå,selv om den er litt misvisende. Det er ikke tale om å finne det dårligste utfallet alt i alt, men det dårligste utfallet for hver handling. Disse kan naturligvis høre til forskjellige tilstander (altså forskjellige kolonner i tabellen i avsnitt 1).

4. I det endelige tilfellet er det likegyldig om man forutsetter $p_j \geq 0$ eller $p_j > 0$. Dersom $p_j = 0$, er s_j umulig og kan fjernes fra mengden av potensielle tilstander.

Hvor kommer sannsynlighetene fra? I noen tilfeller vil man kunne si at det eksisterer objektivt gitte sannsynligheter. Det vil typisk gjelde i kontrollerte (penge)spill, der spillets regler bestemmer at de ulike utfallene skal ha bestemte sannsynligheter. En annen mulighet er at sannsynlighetene er basert på erfaring, dvs. observerte frekvenser i (et stort antall) tidligere tilfeller av samme type. Endelig kan det i sannsynlighetene ligger et element av skjønn eller subjektiv vurdering hos beslutningstakeren. To personer som står overfor det som objektivt virker som samme beslutningsproblem, kan altså tenkes å vurdere sannsynlighetene ulikt.

Sannsynlighetene og deres natur er et stort tema som det ikke er aktuelt å gå nærmere inn på her. I denne sammenhengen er det tilstrekkelig å forutsette at beslutningstakeren knytter bestemte sannsynlighetene til tilstandene.

Når slike sannsynligheter er innført, kan en handling identifiseres med et lotteri over utfall. I tabellen i avsnitt 1 vil handlingen a_i gi utfallet $U_{i,1}$ med sannsynlighet p_1, $U_{i,2}$ med sannsynlighet p_2, ..., $U_{i,j}$ med sannsynlighet p_j, ... og $U_{i,n}$ med sannsynlighet p_n. For å kunne treffe en rasjonell beslutning, må beslutningstakeren ha preferanser over slike lotterier, eller prospekter, som de ofte blir kalt.

Som nevnt kan utfallene i prinsippet være svært kompliserte objekter. For diskusjonen videre spiller det egentlig ingen rolle hva utfallene er, men det er trolig lettere å følge resonnementene dersom man konsentrerer oppmerksomheten om et enkelt eksempel. Heretter er det derfor forutsatt at et utfall ganske enkelt er et pengebeløp. Det betyr at beslutningstakeren bare bryr seg om dette beløpet. Ingen andre aspekter av utfallet har betydning, og handling eller tilstand har ingen verdi i seg selv.

Dermed kan en handling identifiseres med en (endelig) liste over mulige beløp, med en sannsynlighet knyttet til hvert beløp. Et slikt prospekt kan betegnes på følgende måte:

$$A = \{p_1{:}x_1;\ p_2{:}x_2;\ \ldots\ p_j{:}x_j;\ \ldots\ p_n{:}x_n\}.$$

Her mottar man altså beløpet x_j med sannsynlighet p_j for $j = 1, 2, \ldots n$, og det er et krav at $p_j \geq 0$ for alle j og $p_1 + p_2 + \ldots + p_j + \ldots + p_n = 1$.

5. Nytteforventningsteoremet

Beslutningstakeren er forutsatt å ha preferanser over objekter av formen A fra avsnitt 4.

Hvilke krav er det rimelig at disse preferansene oppfyller? Det er vanlig å stille noe strengere krav enn dem som blir innført i ordinær konsumentteori under full sikkerhet.

For det første ligger det i formalismen at bare beløpene og deres sannsynligheter skal spille en rolle. Prosessen som produserer sannsynlighetene er uten betydning. Dersom man mottar 100 kr. sannsynlighet ¼ og ellers 0, skal det ikke spile noen rolle om en mynt blir kastet to ganger og man får 100 kr. dersom det blir "mynt" begge gangene, eller om et ruletthjul blir brukt, der en fjerdedel av tallene gir gevinst 100 kr., eller om en hvilken som helst annen prosess med samme sannsynlighet blir brukt.

La A være som angitt ovenfor og la B være et annet prospekt. Dersom det inngår beløp i B som ikke fins i A, kan vi føye disse til i A med sannsynlighet 0, og vice versa. Det ligger derfor ikke noe tap av generalitet i skrive:

$$A = \{p_1{:}x_1;\ p_2{:}x_2;\ \ldots\ p_j{:}x_j;\ \ldots\ p_n{:}x_n\},$$

$$B = \{q_1{:}x_1;\ q_2{:}x_2;\ \ldots\ q_j{:}x_j;\ \ldots\ q_n{:}x_n\}.$$

La tallet λ oppfylle $0 \leq \lambda \leq 1$. Da kan vi betrakte prospektet

$$C = \{\lambda{:}A;\ 1\text{-}\lambda{:}B\}.$$

Først trekker man altså lodd mellom A og B, med sannsynlighet henholdsvis λ og $1\text{-}\lambda$. Så gjennomfører man det lotteriet som ligger i enten A eller B. Alt i alt har beløpet x_j sannsynlighet $\lambda p_j + (1\text{-}\lambda)q_j$, for alle $j = 1, 2, \ldots n$. Det skal ikke spille noen rolle om man i stedet hopper over A og B og direkte gjennomfører et lotteri der beløpene har disse sannsynlighetene.

For det andre er det vanlig å innføre et såkalt *uavhengighetsaksiom*. La A, B og C være prospekter, og anta at beslutningstakeren foretrekker A framfor B. La tallet λ oppfylle $0 < \lambda \leq 1$. Da sier dette aksiomet at beslutningstakeren skal foretrekke

$$D = \{\lambda{:}A;\ 1\text{-}\lambda{:}C\}$$

framfor

$$E = \{\lambda{:}B;\ 1\text{-}\lambda{:}C\}.$$

Logikken er følgende: Dersom siste alternativ blir realisert ved det lotteriet som definerer D eller E, blir utfallet i alle fall C, så det spiller ingen rolle hva som er valgt. Dersom første alternativ blir realisert, og det er mulig siden $\lambda > 0$, blir utfallet A eller B, og det er forutsatt at beslutningstakeren foretrekker A framfor B. I det ene tilfellet gir D og E like godt resultat, i det andre annet tilfellet er D bedre enn E. Derfor – blir det hevdet – vil en rasjonell beslutningstaker foretrekke D framfor E.

Dersom A, B og C hadde vært ulike goder, og λ og $1\text{-}\lambda$ hadde angitt mengder av disse, ville det ikke vært irrasjonelt å foretrekke A framfor B, men samtidig foretrekke E framfor D. Dette kan forklares med effekter som oppstår når A eller B blir konsumert sammen med C. I det tilfellet som her blir diskutert, er det imidlertid ikke tale om å "konsumere" A eller B sammen med C. Enten kommer siste alternativ opp i det lotteriet som definerer D eller E, og da er A og B definitivt ute av verden, eller så kommer første alternativ opp, og da er C ute av verden.

Når disse kravene, og noen andre som ikke er kontroversielle, er oppfylt, gjelder det såkalte nytteforventningsteoremet: Det fins en funksjon u, kalt *nyttefunksjonen*, definert over pengebeløp, slik at beslutningstakeren vurderer prospektet A på grunnlag av dets *forventede nytte*, altså

$$p_1u(x_1) + p_2u(x_2) + \ldots + p_ju(x_j) + \ldots + p_nu(x_n)$$

Det prospektet blir valgt som har høyest forventet nytte.

Som i den ordinære konsumentteorien er det ingen forutsetning om at funksjonen u eksisterer som en mental realitet for beslutningstakeren. Konklusjonen er bare at når betingelsene er oppfylt, vil beslutningstakeren opptre *som om* forventet nytte ble maksimert.

6. Allais' paradoks

Følgende eksempel er brukt som argument mot uavhengighetsaksiomet presentert i avsnitt 5, og dermed mot nytteforventningsteoremet, som bygger på dette aksiomet.

Følgende tabell definerer fire handlinger eller prospekter, *A*, *B*, *C* og *D*. Det er tre tilstander, og deres sannsynligheter er angitt øverst. Inne i tabellen er angitt utfallet for enhver kombinasjon av tilstand og handling, som pengebeløp i en passende enhet.[5]

	0,10	0,01	0,89
A	5	0	0
B	1	1	0
C	5	0	1
D	1	1	1

Beslutningstakeren skal enten velge mellom *A* og *B*, eller velge mellom *C* og *D*.

Dersom nytteforventningsteoremet gjelder, skal *A* foretrekkes framfor *B* hvis og bare hvis *C* blir foretrukket framfor *D*, og tilsvarende for den motsatte preferansen og for indifferens. Uten tap av generalitet kan man sette $u(0) = 0$ og $u(5) = 1$, og det er lett å se at *A* har høyere forventet nytte enn *B* hvis og bare hvis $u(1) < 10/11$, og nøyaktig samme betingelse gjelder for at C har høyere forventet nytte enn D.

Samme konklusjon følger av tankegangen bak uavhengighetsaksiomet. Ved den siste av de tre tilstandene kommer man like godt ut ved *A* som ved *B*. Denne tilstanden skulle derfor være irrelevant for valget mellom *A* og *B*. Ved den siste tilstanden kommer man dessuten like godt ut ved *C* som ved *D*. Den skulle derfor også være irrelevant for valget mellom *C* og *D*. Dersom siste tilstand blir ignorert, er $A = B$ og $C = D$. Altså skal *A* foretrekkes framfor *B* hvis og bare hvis *C* blir foretrukket framfor *D*.

Mange vil intuitivt velge *A* framfor *B*, men *D* framfor *C*, i strid med det som nettopp er sagt.

Både ved *A* og *B* er sjansen stor for ikke å vinne noe. I forventet monetær verdi er *A* langt bedre enn *B*, så det er naturlig å velge *A*. I valget mellom *C* og *D*, er det mulig å oppnå sikkerhet for en gevinst på 1 ved å velge *D*. Riktignok har *C* høyere monetær forventning enn *D*, men dette kan framstå som mindre viktig enn den sikkerheten *D* kan by.

---

5. Enheten må være et relativt stort tall for at det som nedenfor er sagt om manges intuisjon, skal være korrekt. Kanskje kunne 10 000 kroner være passende i Norge i dag.

Empiriske studier, av dette og tilsvarende eksempler, viser utvetydig at mange mennesker velger i strid med nytteforventningsteoremet. Dette skjer ikke som tilfeldige avvik, men på en systematisk måte. Praktisk talt ingen velger *B* og *C* i de to eksemplene, mens mange altså velger *A* og *D*.

Likevel kan man mene at *rasjonelle valg* forutsetter at uavhengighetsaksiomet gjelder. Det mange finner intuitivt naturlig, blir da karakterisert som irrasjonelt.

Motsatt kan man mene at det ligger en rasjonell og konsistent tanke bak valgene av *A* og *D*. I så fall kan det resonnementet som førte fram til uavhengighetsaksiomet, og som er forsøkt gjengitt i avsnitt 5, ikke være overbevisende.

Det er en stor diskusjon om dette i litteraturen.

7. Avslutning

Formålet med dette notatet har vært å framstille logikken i teorien for beslutninger under usikkerhet, og spesielt å presentere nytteforventningsteoremet og uavhengighetsaksiomet, og den innvendingen mot disse som ligger i Allais' paradoks.

Jeg trekker ingen konklusjon.